

На правах рукописи

Коверга Александр Юрьевич

**ПРИМЕНЕНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ МЕТОДОВ В
ИССЛЕДОВАНИИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ
НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ
С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ**

Специальность 01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ярославль – 2012

Работа выполнена на кафедре математического моделирования федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Ярославский государственный университет имени П.Г. Демидова»

Научный руководитель — доктор физико-математических наук, профессор Кубышкин Евгений Павлович

Официальные оппоненты: Рудый Александр Степанович – доктор физико-математических наук, профессор, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, заведующий кафедрой микроэлектроники

Старков Сергей Олегович – доктор физико-математических наук, профессор, Обнинский институт атомной энергетики, заведующий кафедрой компьютерных систем, сетей и технологий

Ведущая организация — ФГБОУ ВПО «Самарский государственный университет»

Защита состоится «___» мая 2012 г. в «___» часов на заседании диссертационного совета Д 212.002.05 в Ярославском государственном университете им. П.Г. Демидова по адресу: 150000, г. Ярославль, ул. Советская, д. 14.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова по адресу: 150000, г. Ярославль, ул. Полушкина роща, д. 1.

Автореферат разослан «___» _____ 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Глызин С.Д.

Общая характеристика работы

Актуальность работы

Диссертация посвящена исследованию установившихся колебательных решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, возникающих при изучении прикладных задач. Изучаются установившиеся решения бифурцирующие из состояния равновесия при изменении параметров уравнения. В качестве основного метода исследования используется метод интегральных (инвариантных) многообразий, позволяющий сводить изучение поведения установившихся решений исходного уравнения (системы уравнений) с бесконечномерным фазовым пространством к исследованию поведения решений на критическом инвариантном конечномерном многообразии. Поведение решений на критическом инвариантном многообразии может быть описано некоторой системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Эта система обыкновенных дифференциальных уравнений может быть построена в нормализованном виде и носит название нормальной формы исходного дифференциального уравнения. Установившиеся решения нормальной формы во многом определяют установившиеся решения исходного уравнения с начальными условиями из некоторой фиксированной окрестности изучаемого состояния равновесия.

Указанный подход в исследовании уравнений с запаздывающим аргументом стал возможен в связи с построением теории инвариантных (центральных) многообразий для полугрупп нелинейных ограниченных операторов в банаховом пространстве, позволяющей сформулировать принцип сведения в исследовании нелинейных дифференциальных уравнений. Понятие инвариантного многообразия было введено А. Пуанкаре¹ при изучении отображений, порождаемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Принцип сведения использовал А.М. Ляпунов² при изучении устойчивости решений в критических случаях, хотя понятие инвариантного многообразия он не использовал. Различные вопросы теории инвариантных многообразий и принципа сведения для систем обыкновенных дифференциальных уравнений рассматривали Д.В. Аносов³, В.А. Плисс⁴, S. Sternberg⁵, A. Kelley⁶, Ю.Н. Бибииков, Дж. Хейл⁷.

¹ Пуанкаре, А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями / А. Пуанкаре — М.-Л.: Гостехиздат, 1947. — 392 с.

² Ляпунов, А.М. Общая задача об устойчивости движения / А.М. Ляпунов — М.-Л.: Гостехиздат, 1950. — 473 с.

³ Аносов, Д.В. Многомерный аналог одной теоремы Адамара / Д.В. Аносов // Науч. докл. высшей школы (физ.-мат. н.). — 1959. — №. 1. — С. 3–12.

⁴ Плисс, В.А. Принцип сведения в теории устойчивости движения / В.А. Плисс // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1964. — Т. 28, Вып. 6. — С. 1297–1324.

⁵ Sternberg, S. Local constructions and a theorem of Poincare / S. Sternberg // Amer. J. Math. — 1957. — V. 79 — P. 175–187.

⁶ Kelley, A. The stable, center-stable, center-unstable, unstable manifolds / A. Kelley // J. Diff. Equat. — 1967. — V. 3 — P. 546–570.

⁷ Хейл, Дж. Колебания в нелинейных системах / Дж. Хейл. — М.: Мир, 1969. — 232 с.

Эти результаты систематизированы в монографиях Ф. Хартмана⁸, Ю.А. Митропольского и О.Б. Лыковой⁹, а также А.М. Самойленко¹⁰ во введении которой имеется достаточно подробный обзор по указанной тематике.

Начиная с 70-х годов, вопросы, связанные с изучением инвариантных многообразий, получили свое дальнейшее развитие в связи с распространением полученных ранее результатов на динамические системы с бесконечномерным фазовым пространством (банаховым, гильбертовым). Это было связано с запросами качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными, дифференциальными уравнениями с отклоняющимся аргументом, вызванные необходимостью исследования устойчивости стационарных решений, обобщением бифуркационной теоремы Андронова-Хопфа на соответствующие классы дифференциальных уравнений. В связи с этим значительный интерес представляло построение теории инвариантных многообразий для полугрупп нелинейных ограниченных операторов, действующих в банаховых и гильбертовых пространствах. Этому посвящены работы А.Н. Куликова, М. Hirsch, С. Pugh¹¹. Систематизированное изложение данных вопросов можно найти в монографиях Дж. Марсдена, М. Мак-Кракена¹², Д. Хенри¹³, Б. Хэссарда, Н. Казаринова, И. Вэна¹⁴. Там же можно найти многочисленные приложения указанной теории.

Метод построения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих поведение траекторий на критическом инвариантном многообразии (нормальной формы) для уравнений с запаздывающим аргументом был впервые предложен Ю.С. Колесовым¹⁵. Построение ведется в амплитудной форме (полярных координатах). В работе Е.П. Кубышкина¹⁶ предложен более удобный способ построения нормальных форм уравнений с запаздывающим аргументом. Этот метод также использовался в работе С.Д. Глызина, Е.П. Кубышкина¹⁷. С различных позиций в квазилинейной постановке ко-

⁸ Хартман, Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман — М.: Мир, 1970. — 720 с.

⁹ Митропольский, Ю. А. Интегральные многообразия в нелинейной механике / Ю.А. Митропольский, О.Б. Лыкова — М.: Наука, 1973. — 512 с.

¹⁰ Самойленко, А. М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные то-ры / А.М. Самойленко — М.: Наука, 1987. — 301 с.

¹¹ Hirsch, M. Stable manifolds and hyperbolic sets / M. Hirsch, C. Pugh // Proc. Symp. Pure Math., XIV, Am. Math. Soc. — 1970. — V. 14 — P. 133–163.

¹² Марсден, Дж. Бифуркация рождения цикла и ее приложения / Дж. Марсден, М. Мак-Кракен — М.: Мир, 1980. — 368 с.

¹³ Хенри, Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений / Д. Хенри — М.: Мир, 1985. — 376 с.

¹⁴ Хэссард, Б. Теория и приложения бифуркации рождения цикла: Пер. с англ. / Б. Хэссард, Н. Казаринов, И. Вэн — М.: Мир, 1985. — 279 с.

¹⁵ Колесов, Ю.С. Метод нормальных форм для систем с запаздыванием / Ю.С. Колесов // Литовский математический сборник. — 1980. — Т. 20, №. 4. — С. 73–78.

¹⁶ Кубышкин, Е.П. Некоторые вопросы динамики распределенных роторов / Е.П. Кубышкин // Математика в Ярославском университете: Сборник обзорных статей к 25-летию математического факультета. — Ярославль. — 2001. — С. 157–182.

¹⁷ Глызин, С.Д. Нелинейная динамика одного дифференциального уравнения второго порядка с периодически возмущенным запаздыванием / С.Д. Глызин, Е.П. Кубышкин // Моделирование и анализ

лебательные решения уравнений с запаздывающим аргументом изучались в работах А.Д. Мышкиса, С.Н. Шиманова¹⁸, В.П. Рубаника¹⁹, В.Н. Фодчука²⁰. В диссертации сформулированные подходы применяются для изучения поведения колебательных решений некоторых дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

Цель работы

Основной целью работы является исследование колебательных решений, возникающих при изменении параметров, некоторых нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, являющихся математическими моделями важных прикладных задач.

Методы исследования

В диссертации использованы метод интегральных многообразий нелинейных систем дифференциальных уравнений с распределенными параметрами, теория нормальных форм дифференциальных уравнений на интегральных многообразиях, теория бифуркаций, асимптотические и численные методы исследования обыкновенных дифференциальных уравнений.

Научная новизна работы

В диссертации выявлены условия возникновения колебательных решений математической модели Ланга-Кобаяши полупроводникового лазера с запаздывающей обратной связью; выявлены условия возникновения хаотических колебаний в зоне комбинационного параметрического резонанса в математической модели генератора электромагнитных колебаний с запаздывающей обратной связью; исследованы условия возникновения хаотических колебаний в математической модели распределенного ротора из материала с нелинейно наследственными свойствами, одна из опор которого испытывает вибрацию; изучена в нелинейной постановке задача двухчастотного параметрического воздействия, в случае основного резонанса. В этом случае выявлены условия генерации хаотических колебаний.

Положения, выносимые на защиту

- 1) Исследованы условия возникновения периодических и двухчастотных решений системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом Ланга-Кобаяши, предложенной в качестве математической модели полупроводникового лазера. Построены асимптотические формулы указанных колебательных решений.

информационных систем. — 2005. — Т.12. № 1. — С. 40–45.

¹⁸ Шиманов, С.Н. Некоторые вопросы теории колебаний систем с запаздыванием / С.Н. Шиманов // Пятая летняя математическая школа. Киев: Ин-т матем. АН УССР. — 1968. — С. 473–549.

¹⁹ Рубаник, В.П. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием / В.П. Рубаник — М.: Наука, 1969. — 287 с.

²⁰ Фодчук, В.Н. О непрерывной зависимости решения дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом от параметра / В.Н. Фодчук // Укр. мат. журн. — 1964. — Т. 16, №. 2. — С. 273–279.

- 2) Выявлены условия возникновения хаотических колебаний в нелинейном уравнении второго порядка с запаздывающим аргументом, являющимся математической моделью генератора электромагнитных колебаний с элементом запаздывания в цепи обратной связи.
- 3) Исследована математическая модель динамики распределенного ротора из материала с нелинейно наследственными свойствами, одна из опор которого испытывает периодическое воздействие. Выявлены условия возникновения колебательных решений, в том числе и хаотических.
- 4) Исследовано влияние двухчастотного параметрического воздействия на нелинейную динамическую систему, в случае основного параметрического резонанса. Выявлены условия генерации хаотических колебаний.

Теоретическая и практическая значимость работы

Работа носит теоретический характер. Полученные в диссертационной работе результаты могут быть использованы при исследовании математических моделей распределенных динамических систем, возникающих в различных областях радиофизики, механики.

Результаты диссертации могут быть использованы при получении научно обоснованных рекомендаций при проектировании генераторов хаотических электромагнитных колебаний.

Апробация работы

Основные результаты работы были представлены на Второй Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи» (Самара, 2005), Международной научной конференции «Математические методы в технике и технологиях» (ММТТ-20) (Ярославль, 2007), Воронежской зимней математической школе С.Г. Крейна (Воронеж, 2008), Воронежской зимней математической школе С.Г. Крейна (Воронеж, 2012), Международной научной конференции, посвященной 35-летию математического факультета и 25-летию факультета информатики и вычислительной техники Ярославского гос. университета им. П.Г. Демидова (Ярославль, 2012).

Кроме того, результаты диссертации неоднократно докладывались на семинаре кафедры математического моделирования Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова, а также обсуждались на семинаре научно-образовательного центра «Нелинейная динамика» Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова.

Публикации

По теме диссертации опубликовано 13 работ, список которых приведен в конце автореферата. Из совместных публикаций в диссертационную работу включены результаты, полученные автором.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, содержащего 66 наименований. Работа содержит 20 рисунков. Общий объем диссертации составляет 80 страниц.

Краткое содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность проводимого исследования, приводятся его цели и задачи. Кроме того, в нем содержится обзор литературы, связанной с тематикой диссертации, а также приводится структура работы.

В **первой главе** работы исследуется математическая модель Ланга-Кобаяши полупроводникового лазера с запаздывающей обратной связью. Она представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом следующего вида

$$\dot{E} = k(1 + i\alpha)(N - 1)E + \gamma \exp(-i\phi_0)E(t - \tau), \quad (1)$$

$$\dot{N} = -\gamma_{\parallel}(N - \mathcal{J} + |E|^2 N). \quad (2)$$

Здесь $E(t) = E_x(t) + iE_y(t)$, $i = \sqrt{-1}$ - комплексная переменная, описывающая электромагнитное поле, $N(t)$ - плотность носителей зарядов, \mathcal{J} - ток накачки, k - коэффициент затухания колебаний, $1/\gamma_{\parallel}$ - время спонтанной эмиссии, α - коэффициент, характеризующий лазер, γ - процент отраженного излучения, ϕ_0 - фазовый сдвиг излучения, τ - величина запаздывания, равная времени, которое необходимо излучению, чтобы достичь зеркала и вернуться обратно.

Изучаются автоколебательные решения системы уравнений (1)-(2), бифурцирующие из состояния равновесия

$$E(t) = 0, \quad N(t) = \mathcal{J} \quad (3)$$

при изменении параметров системы уравнений.

Характеристическое уравнение линеаризованной на (3) системы уравнений имеет вид

$$\lambda - A(1 + i\alpha) - \gamma \exp(-\lambda\tau - i\phi_0) = 0, \quad A = k(\mathcal{J} - 1). \quad (4)$$

Расположение корней характеристического уравнения исследуются методом \mathcal{D} -разбиений²¹. На рис. 1 представлена характерная картина \mathcal{D} -разбиений при указанных значениях параметров.

²¹ *Неймарк, Ю.И.* \mathcal{D} -разбиение пространства квазиполиномов (к устойчивости линеаризованных распределенных систем) // Ю.И. Неймарк // ПММ — 1949. — Т. 13, №. 4. — С. 349–380.

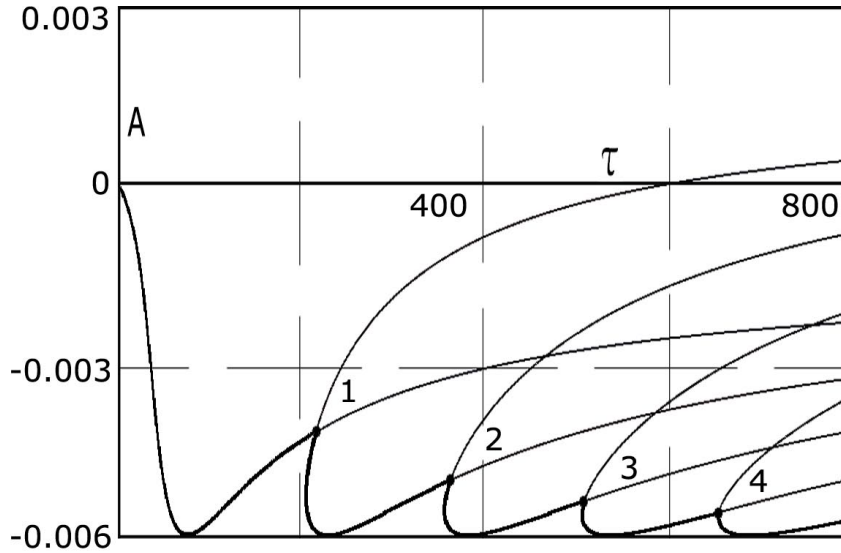


Рис. 1. $\alpha = 4, \gamma = 0.005, \phi_0 = \pi/2$.

Как следует из рис. 1, потеря устойчивости состояния равновесия (3) может происходить с прохождением одного ($i\sigma_1$), либо двух ($i\sigma_1, i\sigma_2, |\sigma_1| < |\sigma_2|$) корней характеристического уравнения (3) через мнимую ось комплексной плоскости. При этом оказывается, что резонансного соотношения $|\sigma_2|/|\sigma_1| = 1$ реализовано быть не может.

Изучается характер колебательных решений системы уравнений (1)-(2), бифурцирующих из (3) в случае потери устойчивости, связанной с прохождением двух корней характеристического уравнения (4) через мнимую ось комплексной плоскости. В этом случае поведение решений системы уравнений (1)-(2) в окрестности состояния равновесия (3) определяется следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_1 = (i\sigma_1 + \varepsilon\lambda_1^{(1)})z_1 + (d_{11}|z_1|^2 + d_{12}|z_2|^2)z_1 + \dots \equiv Z_1(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2; \varepsilon), \quad (5)$$

$$\dot{z}_2 = (i\sigma_2 + \varepsilon\lambda_2^{(1)})z_2 + (d_{21}|z_1|^2 + d_{22}|z_2|^2)z_2 + \dots \equiv Z_2(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2; \varepsilon), \quad (6)$$

коэффициенты которой эффективно вычисляются, ε - малый параметр.

В диссертации выполнен анализ поведения решений системы уравнений (5)-(6), установлена взаимосвязь между решениями уравнений (5)-(6) и системы уравнений (1)-(2), построены асимптотические (по ε) формулы для периодических и инвариантных торов системы уравнений (1)-(2).

Во **второй главе** рассматривается задача параметрического возбуждения хаотических колебаний в дифференциальном уравнении второго порядка с запаздывающим аргументом следующего вида

$$\ddot{x} + A\dot{x} + x + [B + G(x, \dot{x}, x(t-h(t)), \dot{x}(t-h(t)))] \dot{x}(t-h(t)) = 0, \quad (7)$$

где $h(t) = h + a \cdot \sin(\omega t)$; A, B, h, a, ω - положительные параметры ($h > a$),

$$G(x_1, x_2, x_3, x_4) = g_1x_1 + g_2x_2 + g_3x_3 + g_4x_4 + g_{11}x_1^2 + g_{12}x_1x_2 + \dots$$

достаточно гладкая нелинейная функция.

Уравнения вида (7) возникают при моделировании электронных устройств с активными нелинейными элементами и запаздывающей обратной связью.

Изучается возможность возбуждения за счет периодического изменения запаздывания сложных, в том числе хаотических колебаний. При этом предполагается, что при $a = 0$ нулевое решение уравнения (7) асимптотически устойчиво.

Положим $a = 0$ и рассмотрим характеристическое уравнение линейной части уравнения (7)

$$P(\lambda) \equiv \lambda^2 + A\lambda + 1 + B \exp(-\lambda h) = 0. \quad (8)$$

Анализ расположения корней (8) проводится методом \mathcal{D} -разбиений, из которого следует, что при определенных значениях параметров уравнение может иметь корни $\pm i\sigma_j$, ($\sigma_j > 0, j = 1, 2$). При этом остальные корни имеют отрицательные вещественные части. При этом оказывается, что при $A = A_0 = \sqrt{6}/6, B = B_0 = \sqrt{6}/3, h = h_0 = 4\pi\sqrt{2}/3$ уравнение (8) имеет корни $\pm i\sigma_1 = \pm i\sqrt{2}/2, \pm i\sigma_2 = \pm i\sqrt{2}$, т.е. имеет место внутренний резонанс 1 : 2. Указанный случай рассматривается во второй главе.

Положим $A = A_0 + \varepsilon A_1, B = B_0 + \varepsilon B_1, h = h_0 + \varepsilon h_1$, и $a = \varepsilon a_1$, и выберем $\omega = \sigma_1 + \sigma_2 + \varepsilon\delta$, (δ - расстройка резонанса).

Таким образом рассматривается случай комбинационного параметрического резонанса в нелинейной постановке при наличии внутреннего резонанса 1 : 2.

Уравнение (7) имеет в окрестности нуля фазового пространства $C(-h(t, \varepsilon), 0) \oplus C(-h(t, \varepsilon), 0)$ четырехмерное $2\pi/\omega$ периодическое локальное асимптотически устойчивое гладкое интегральное многообразие поведение решений на котором определяет поведение решений уравнения (7) из некоторого фиксированного шара с центром в нуле фазового пространства. Поведение решений на интегральном многообразии определяется поведением решений следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= (i\sigma_1 + \lambda_1^1 \varepsilon + d_{11}|z_1|^2 + d_{12}|z_2|^2)z_1 + b_1 \bar{z}_1 z_2 + \varepsilon c_1 \bar{z}_2 \exp(i\tau) + \dots \equiv \\ &\equiv Z_1(\omega t, z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2; \varepsilon), \quad (\tau = \omega t), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= (i\sigma_2 + \lambda_2^1 \varepsilon + d_{21}|z_1|^2 + d_{22}|z_2|^2)z_2 + b_2 z_1^2 + \varepsilon c_2 \bar{z}_1 \exp(i\tau) + \dots \equiv \\ &\equiv Z_2(\omega t, z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2; \varepsilon), \quad (z_j = z_j(t) \in C, j = 1, 2). \end{aligned} \quad (10)$$

В (9)-(10) точками обозначены слагаемые, имеющие по соответствующим переменным более высокий порядок малости. В явном виде приведены лишь „главные“ слагаемые разложений.

Комплексные коэффициенты системы эффективно вычисляются.

Рассмотрим линейную часть уравнений (9)-(10). Обозначим $\lambda_j^1 = \tau_j^1 + i\sigma_j^1$ и выберем A_1, B_1, h_1 таким образом, чтобы $\tau_j^1 < 0$ ($j = 1, 2$). Как следует из

результатов работы²² в этом случае в плоскости параметров (ω, ε) существует область параметрического (комбинационного) резонанса определяемая неравенством

$$\varepsilon\delta^{(1)}(a_1) + o(\varepsilon) < \sigma_1 + \sigma_2 - \omega < \varepsilon\delta^{(2)}(a_1) + o(\varepsilon), \quad (11)$$

где

$$\delta^{(1)}(a_1) = \left[(\tau_2^1 - \tau_1^1) \operatorname{Im}(c_1 \bar{c}_2) + (\tau_1^1 + \tau_2^1) \sqrt{B} \right] / (2\tau_1^1 \tau_2^1) + \sigma_1^1 - \sigma_2^1,$$

$$\delta^{(2)}(a_1) = \left[(\tau_2^1 - \tau_1^1) \operatorname{Im}(c_1 \bar{c}_2) - (\tau_1^1 + \tau_2^1) \sqrt{B} \right] / (2\tau_1^1 \tau_2^1) + \sigma_1^1 - \sigma_2^1,$$

а

$$B = \operatorname{Im}^2(c_1 \bar{c}_2) + 4\tau_1^1 \tau_2^1 \operatorname{Re}(c_1 \bar{c}_2) - 4(\tau_1^1 \tau_2^1)^2.$$

В условиях (11) исследуется поведение решений системы уравнений (9)-(10).

Положим в (9)-(10) $z_j = \varepsilon^{1/2} \rho_j \exp(i\tau)$, $\rho_j \geq 0$, ($j = 1, 2$), $t \rightarrow \varepsilon^{-1}t$ считая при этом $g_j = \varepsilon^{1/2} g_j^*$, ($j = 1, \dots, 4$), и выделим главную часть уравнений „медленных“ переменных $\rho_1, \rho_2, \Theta_1 = \omega t - \tau_1 - \tau_2, \Theta_2 = 2\tau_1 - \tau_2$. Сделаем это для конкретных значений параметров: $g_1^* = 22, 0; g_2^* = 23, 0; g_3^* = 55, 0; g_4^* = 6, 0; g_{33} = -1, 8$. Остальные $g_{jk} = 0$, ($j, k = 1, \dots, 4$). Нормируем $\rho_j \rightarrow \rho_j (\tau_j^1 / a_{jj})^{1/2}$, ($a_{jj} > 0$). Выбрав теперь A_1, B_1, h_1 таким образом, чтобы $\tau_1 = \tau_2 = 1, \sigma_1^1 = \sigma_2^1$, получим систему уравнений

$$\dot{\rho}_1 = (-1 - \rho_1^2 + a_{12}\rho_2^2)\rho_1 + c_1 \cos(\Theta_1 + \gamma_1)\rho_2 + b_1 \cos(-\Theta_2 + \beta_1)\rho_1\rho_2, \quad (12)$$

$$\dot{\rho}_2 = (-1 + a_{21}\rho_1^2 - \rho_2^2)\rho_2 + c_2 \cos(\Theta_1 + \gamma_2)\rho_1 + b_2 \cos(\Theta_2 + \beta_2)\rho_1^2, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \dot{\Theta}_1 = & \delta_1 - b_{11}\rho_1^2 + b_{12}\rho_2^2 - c_1 \sin(\Theta_1 + \gamma_1)\rho_2/\rho_1 - \\ & - c_2 \sin(\Theta_1 + \gamma_2)\rho_1/\rho_2 - b_1 \sin(-\Theta_2 + \beta_1)\rho_2 - b_2 \sin(\Theta_2 + \beta_2)\rho_1^2/\rho_2, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \dot{\Theta}_2 = & \delta_2 + b_{21}\rho_1^2 + b_{22}\rho_2^2 + 2c_1 \sin(\Theta_1 + \gamma_1)\rho_2/\rho_1 - \\ & - c_2 \sin(\Theta_1 + \gamma_2)\rho_1/\rho_2 + 2b_1 \sin(-\Theta_2 + \beta_1)\rho_2 - b_2 \sin(\Theta_2 + \beta_2)\rho_1^2/\rho_2, \end{aligned} \quad (15)$$

в которой $a_{12} = -5.69; a_{21} = -0.705; b_1 = 8.17; b_2 = 4.39; c_1 = a_1 \cdot 0.3; c_2 = a_1 \cdot 0.014; b_{11} = 0.138; b_{12} = 0.527; b_{21} = 0.454; b_{22} = 0.367; \gamma_1 = -0.222; \gamma_2 = 0.322$.

Параметры δ_1 и δ_2 - характеризуют, соответственно, расстройку параметрического возбуждения и расстройку внутреннего резонанса. Это свободные параметры. Таким образом система зависит от трех параметров - δ_1, δ_2 и a_1 .

²² *Кубышкин, Е.П.* Параметрический резонанс в линейных системах с последствием / *Е.П. Кубышкин // Исследования по устойчивости и теории колебаний: Межвузовский тематический сборник. — Ярославль. — 1976. — С. 43-76.*

Приведем некоторые результаты численного исследования системы (12)-(15). Система численно анализировалась с использованием программы Tracer²³. В рассматриваемом случае область параметрического резонанса в плоскости (δ_1, a_1) симметрична относительно оси a_1 . На рис. 2 приведена половина области неустойчивости (она заштрихована). Она определяется функциями $\gamma^{(1)}(a_1)$ и $\gamma^{(2)}(a_1)$, приведенными в (11). Положим $b_1 = b_2 = 0$, т.е. исключим влияние внутреннего резонанса. Уравнения (12)-(13) в этом случае не зависят от Θ_2 . При малых a_1 и любых δ_1 решения (12)-(13) стремятся к единственному состоянию равновесия $\rho_1 = \rho_2 = 0, \Theta_1 = \Theta_0$. При увеличении a_1 и переходе границы области параметрического резонанса от указанного состояния равновесия ответвляется асимптотически устойчивое состояние равновесия вида $\rho_{10} > 0, \rho_{20} > 0, \Theta_0$. Дальнейшее увеличение a_1 приводит к увеличению ρ_{10}, ρ_{20} . Отметим, что этому состоянию равновесия в уравнении (7) отвечает асимптотически устойчивый инвариантный тор.

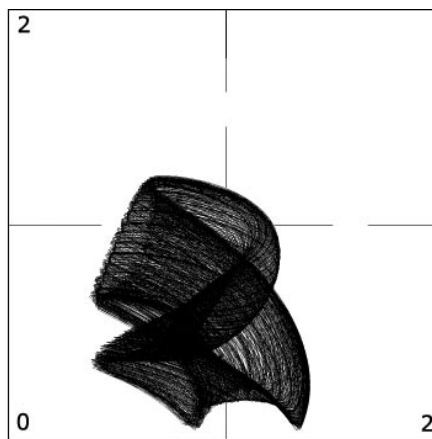
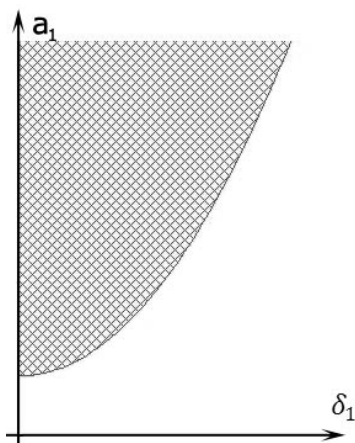


Рис. 2. Область неустойчивости Рис. 3. Проекция аттрактора на (ρ_1, ρ_2)

Пусть теперь b_1, b_2 выбраны согласно (12)-(15). При a_1, δ_1 принадлежащих области устойчивости, представленной на рис. 2, и произвольном δ_2 все решения (12)-(15) по ρ_1 и ρ_2 стремятся к нулю. При пересечении границы неустойчивости от нулевого решения ответвляется устойчивый цикл, размеры которого увеличиваются с ростом a_1 . При a_1, δ_1 принадлежащих области параметрического резонанса возможно сложное поведение траекторий. Так, при $a_1 = 37.571, \delta_1 = 5.0$ существует хаотический аттрактор. Значения его ляпуновских показателей равны $\lambda_1 = 0.02; \lambda_2 = 0; \lambda_3 = -0.01; \lambda_4 = -10.14$, а ляпуновская размерность $d_L \approx 3.00$. На рис. 3 приведена проекция этого аттрактора на плоскость ρ_1, ρ_2 .

Отметим, что в п. 2.5 диссертации рассмотрено приложение указанных результатов к исследованию работы одного генератора электромагнитных колебаний с запаздывающей обратной связью.

²³ Глызин, Д.С. Пакет программ для анализа динамических систем "Tracer". Заявка №2008610548 от 14.02.2008г. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2008611464. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 24.03.2008г.

В **третьей главе** рассматривается математическая модель идеального распределенного ротора постоянного сечения длины l , вращающийся с постоянной угловой скоростью Ω , концы которого опираются на подшипники. Предполагается, что одна из опор ротора испытывает периодическое воздействие (вибрацию). Материал ротора считается наследственно вязкоупругим и подчиненным следующей реологической модели вязкоупругого тела²⁴:

$$\sigma(t) = E \left(f(\varepsilon(t)) - \int_{-\infty}^0 R(\tau) f(\varepsilon(t + \tau)) d\tau \right),$$

где $\sigma(t), \varepsilon(t)$ соответственно напряжение и относительная деформация, E - модуль Юнга, $R(\tau)$ - функция релаксации, $f(\varepsilon) = \varepsilon + f_3\varepsilon^3 + f_5\varepsilon^5 + \dots$, ($f_j > 0$) нелинейная функция деформации. Относительно функции $R(\tau)$ ($-\infty < \tau < 0$) предполагается выполнение следующих условий:

$$R(\tau) > 0, \quad \frac{d^2}{d\tau^2} R(\tau) > 0, \quad \int_{-\infty}^0 R(\tau) d\tau < 1,$$

$$R(\tau) \leq M_0 \exp(\gamma_0 \tau), \quad (M_0, \gamma_0 > 0), \tau \rightarrow -\infty. \quad (16)$$

Математической моделью рассматриваемой механической системы является следующая краевая задача¹⁶

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a \left(\left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 \right) \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(b \left(\left| \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right|^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \right. \\ & \left. - \int_{-\infty}^0 R(\tau) \exp(-i\Omega\tau) b \left(\left| \frac{\partial^2 u(s, t + \tau)}{\partial s^2} \right|^2 \right) \frac{\partial^2 u(s, t + \tau)}{\partial s^2} d\tau \right) = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

$$u|_{s=0} = \frac{\partial u}{\partial s} \Big|_{s=0} = 0, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \left(b \left(\left| \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right|^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \int_{-\infty}^0 R(\tau) \exp(-i\Omega\tau) b \left(\left| \frac{\partial^2 u(s, t + \tau)}{\partial s^2} \right|^2 \right) \frac{\partial^2 u(s, t + \tau)}{\partial s^2} d\tau \right) \Big|_{s=1} = \\ & = \nu_1 \exp(i\omega t + i\gamma_1), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(b \left(\left| \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right|^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \int_{-\infty}^0 R(\tau) \exp(-i\Omega\tau) b \left(\left| \frac{\partial^2 u(s, t + \tau)}{\partial s^2} \right|^2 \right) \frac{\partial^2 u(s, t + \tau)}{\partial s^2} d\tau \right) \Big|_{s=1} =$$

²⁴ Работнов, Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел / Ю.Н. Работнов — М.: Наука, 1977. — 384 с.

$$= \nu_2 \exp(i\omega t + i\gamma_2), \quad (20)$$

где

$$u(s, t) = u_x(s, t) + iu_y(s, t), i = \sqrt{-1}, 0 < \nu_1, \nu_2 \ll 1, 0 \leq \gamma_1, \gamma_2 \leq 2\pi, \omega \in R.$$

Краевая задача приведена в безразмерных переменных

$$s = z/l, u = u'/l, t = t'/t_0, \Omega = \Omega't_0, t_0 = m^{1/2}l^2(EI_0)^{-1/2},$$

функции $a(\zeta), b(\zeta)$ являются аналитическими в окрестности точки $\zeta = 0$ и имеют вид

$$a(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + \dots, \quad b(\zeta) = 1 + b_1\zeta + \dots$$

Здесь $u'(z, t') = u'_x(z, t') + iu'_y(z, t')$ смещения средней линии ротора в направлении осей OX и OY соответственно; ось OZ системы координат $OXYZ$, связанной с инерциальным пространством, направлена вдоль средней оси недеформированного ротора; t' - время; m - погонная масса ротора; $a_j = l^{4-2j}m^{1-j}(EI_0)^{j-1}a'_j$, $b_j = (I_0l^{2j})^{-1}I_j f_{2j+1}$; $I_j = \int x_1^{2(j+1)} dx_1 = \int y_1^{2(j+1)} dy_1$ моменты инерции поперечного сечения ротора относительно одной из осей соответствующих порядков; функция $a'(\zeta) = a'_0 + a'_1\zeta + \dots$ ($a'_j > 0$) характеризует внешнее нелинейное трение; ν_j, γ_j ($j = 1, 2$) и ω характеризуют амплитуду, фазу и частоту внешних изгибающего момента и периодической силы.

Изучается возможность и условия возникновения в краевой задаче (17)-(20) хаотических колебаний (странных аттракторов).

Уравнение (17) является уравнением с бесконечным запаздыванием аргумента. Следуя¹⁶ дается определение фазового пространства для краевой задачи (17)-(20), пространства начальных условий и понятие решения.

Положим сначала $\nu_1 = \nu_2 = 0$ и исследуем устойчивость нулевого решения краевой задачи (17)-(20). Показано, что устойчивость нулевого решения (17)-(20) определяется характером расположения корней последовательности характеристических уравнений

$$l_n(\lambda) \equiv \lambda^2 + a_0\lambda + \omega_n^2 \left(1 - \int_{-\infty}^0 R(\tau) \exp((\lambda - i\Omega)\tau) d\tau\right) = 0, \quad (21)$$

$n = 1, 2, \dots$, $\omega_n = \beta_n^2$, где β_n - положительный корень уравнения $\operatorname{ch} \beta_n \cdot \cos \beta_n + 1 = 0$. При этом потеря устойчивости уравнения (21) происходит по соответствующей функции $e_n(s) = w_n(s) / \|w_n(s)\|_{L_2}$, $w_n(s) = (\operatorname{sh} \beta_n + \sin \beta_n)(\operatorname{ch}(\beta_n s) - \cos(\beta_n s)) - (\operatorname{ch} \beta_n + \cos \beta_n)(\operatorname{sh}(\beta_n s) - \sin(\beta_n s))$.

Расположение корней удобно исследовать методом \mathcal{D} -разбиений. Положив $\lambda = i\sigma$ и выделив вещественную и мнимую части, имеем

$$-\sigma^2 + \omega_n^2(1 - R_C(\sigma - \Omega)) = 0, \quad a_0 = -\frac{\omega_n^2 R_S(\sigma - \Omega)}{\sigma},$$

где

$$R_C(\sigma) = \int_0^{\infty} R(-\tau) \cos(\sigma\tau) d\tau, \quad R_S(\sigma) = \int_0^{\infty} R(-\tau) \sin(\sigma\tau) d\tau, \quad (22)$$

составляющие нормированного комплексного модуля упругости материала $E^*(\sigma) = (1 - R_C(\sigma) + iR_S(\sigma))$, который определяется экспериментально.

Отметим, что согласно условию (16) при $\sigma > 0$, $0 < R_C(\sigma), R_S(\sigma) < 1$, $R_C(\sigma), R_S(\sigma) \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow \infty$. Для $R(\tau)$, удовлетворяющих условиям (16), функции (22) качественно имеют вид, представленный на рис. 4. В соответствии с этим, кривые на плоскости (a_0, Ω) , соответствующие корням характеристического уравнения (21), расположенным на мнимой оси, качественно имеют вид, представленный на рис. 5. При этом каждая кривая является границей области устойчивости (неустойчивости) нулевого решения (17)-(20) по n -ой собственной функции $e_n(s)$. Области неустойчивости заштрихованы, $\Omega_{n0} = \omega_n(1 - R_C(0))^{1/2}$. Как следует из рис. 5, потеря устойчивости решений может происходить по одному или по двум собственным функциям $e_n(s)$. В последнем случае каждая функция $e_n(s)$ имеет собственную частоту колебаний. Такой случай в дальнейшем и рассматривается.

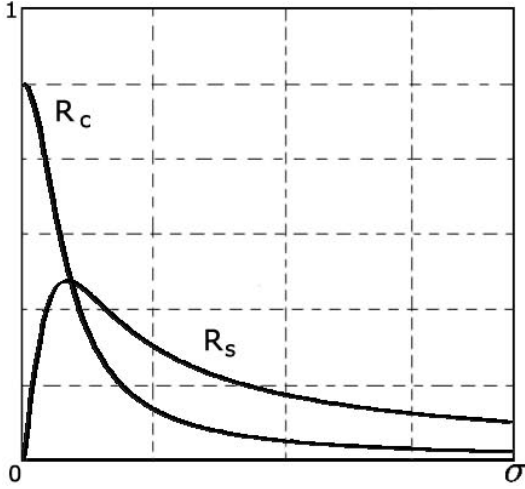


Рис. 4. Вид функций R_C и R_S

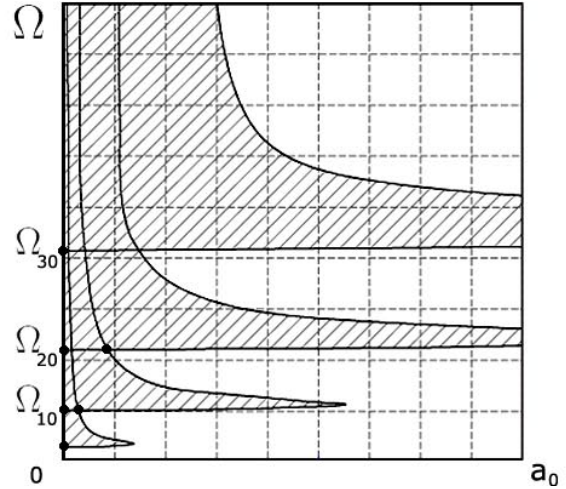


Рис. 5. Кривые, соответствующие корням

Пусть теперь $\nu_1, \nu_2 \neq 0$. Точку пересечения кривых, исходящих из Ω_{n0} и Ω_{n+10} обозначим (a_n, Ω_n) , а соответствующие им значения σ через σ_n и σ_{n+1} . Будем изучать поведение решений начально-краевой задачи (17)-(20) при изменении параметров в окрестности указанных точек. Введем для этого параметр $0 < \varepsilon \ll 1$ и положим

$$a = a_n + a_{n1}\varepsilon, \quad \Omega = \Omega_n + \Omega_{n1}\varepsilon, \quad \nu_j = \nu_{j0}\varepsilon^{1/2}, \quad (j = 1, 2),$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\delta = 2\sigma_n - \sigma_{n+1} + \varepsilon\delta_1. \quad (23)$$

Изучим характер установившихся колебательных решений краевой задачи (17)-(20) возникающих в окрестности нулевого решения при потере его

устойчивости в предположениях (23). Краевая задача (17)-(20) имеет в окрестности нуля фазового пространства четырехмерное $2\pi/\omega$ -периодическое локальное устойчивое гладкое интегральное многообразие, поведение решений на котором определяет поведение решений начально-краевой задачи (17)-(20). Система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая поведение траекторий краевой задачи (17)-(20) на интегральном многообразии будет иметь вид

$$\dot{z}_1 = (i\sigma_n + \varepsilon\lambda_n^1 + d_{11}|z_1|^2 + d_{12}|z_2|^2)z_1 + \varepsilon^{1/2}\nu_0 A_1 \bar{z}_1 z_2 \exp(i\omega t) + \dots, \quad (24)$$

$$\dot{z}_2 = (i\sigma_{n+1} + \varepsilon\lambda_{n+1}^1 + d_{21}|z_1|^2 + d_{22}|z_2|^2)z_2 + \varepsilon^{1/2}\nu_0 A_2 z_1^2 \exp(-i\omega t) + \dots, \quad (25)$$

коэффициенты которой эффективно вычисляются через параметры краевой задачи (17)-(20).

В диссертации в качестве примера рассмотрено ядро вида

$$R(\tau) = \frac{\alpha(\tau)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \exp(-\tau) \quad (0 < \alpha < 1)$$

где $\Gamma(1-\alpha)$ - гамма функция Эйлера, (модифицированное ядро Абеля)²⁴. В результате будем иметь

$$R_C(\sigma) = \frac{\alpha}{(1+\sigma^2)^{\frac{1-\alpha}{2}}} \cos((1-\alpha) \arctg(\sigma)),$$

$$R_S(\sigma) = \frac{\alpha}{(1+\sigma^2)^{\frac{1-\alpha}{2}}} \sin((1-\alpha) \arctg(\sigma)).$$

Положим $\alpha = 0.84$ и обратимся к рис. 5. Соответствующие значения параметра σ равны $\sigma_1 = 2.888$ и $\sigma_2 = 21.424$.

Выберем $\Omega_{n1} = 1.2$, $a_{n1} = 1.2$, $a_1 = 0.1$, $b_1 = 0.21$. Считая $\nu_{10} = \nu_{20} = \nu_0$, вычислим коэффициенты системы (24)-(25). В (24)-(25) положим $z_j = \varepsilon^{1/2}\rho_j \exp(i\tau_j)$, ($\rho_j \geq 0, j = 1, 2$), $t \rightarrow \varepsilon^{-1}t$ и выделим главную часть уравнений „медленных“ переменных ρ_1, ρ_2 , $\Theta = \omega t - 2\tau_1 + \tau_2$. Пронормировав теперь $\rho_1 \rightarrow 0.05*\rho_1, \rho_2 \rightarrow 0.02*\rho_2$ получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{\rho}_1 = (3.94 - \rho_1^2 - 1.25\rho_2^2)\rho_1 + 1.8\nu_0\rho_1\rho_2 \cos(\Theta - 0.46),$$

$$\dot{\rho}_2 = (4.7 - 1.41\rho_1^2 - \rho_2^2)\rho_2 + 0.003\nu_0\rho_1^2 \cos(-\Theta + 0.55),$$

$$\dot{\Theta} = \delta + 2.28\rho_1^2 + 1.93\rho_2^2 - 3.6\nu_0\rho_2 \sin(\Theta - 0.46) + 0.003\nu_0\rho_1/\rho_2 \sin(-\Theta + 0.55),$$

зависящую от двух параметров ν_0 и δ .

Система численно анализировалась при разных значениях параметров γ_0 и δ с использованием программы Tracer²³. Система может иметь как устойчивые состояния равновесия, периодические решения, так и хаотические колебания. Так, при $\delta = 2.1$, изменяя ν_0 имеем следующую динамику. При

$\nu_0 = 2.8$ имеем устойчивое состояние равновесия с координатами $\rho_{10} = 1.624$, $\rho_{20} = 0.991$, $\Theta_0 = 8.329$. Затем из состояния равновесия при $\nu_0 = 3.25$ происходит рождение цикла и далее при $\nu_0 = 4.73$, $\nu_0 = 4.961$, $\nu_0 = 4.997$ происходит серия бифуркаций удвоения периода. В результате чего при $\nu_0 = 5.05$ образуется хаотический аттрактор. Его ляпуновские показатели равны $\lambda_1 = 0.38$; $\lambda_2 = 0$; $\lambda_3 = -7.195$, а ляпуновская размерность $d_L \approx 2.053$.

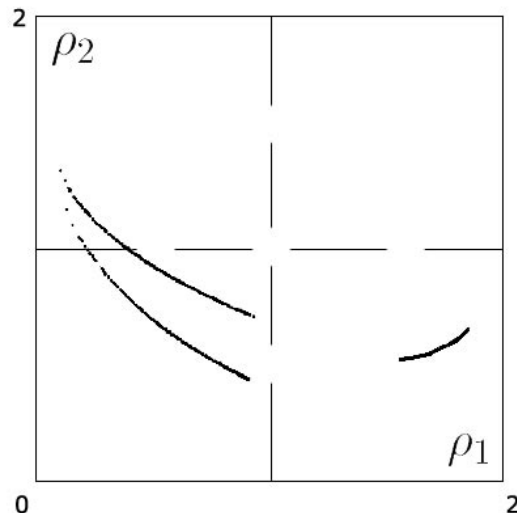
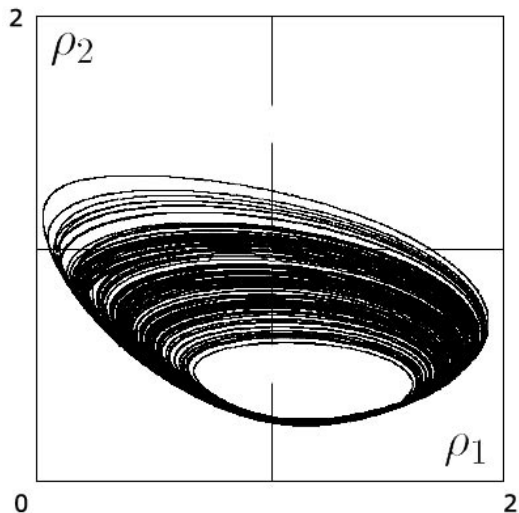


Рис. 6. Проекция аттрактора на (ρ_1, ρ_2) Рис. 7. Сечение Пуанкаре $\Theta = \pi/2$

Проекция аттрактора на плоскость (ρ_1, ρ_2) приведена на рис. 6. При этом переменная Θ неограниченно возрастает при $t \rightarrow \infty$. На рис. 7 изображено сечение Пуанкаре плоскостью $\Theta = \pi/2$. Просматривается фрактальная структура предельного множества.

В **четвертой главе** на примере одного дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом изучается поведение решений нелинейной динамической системы в случае двухчастотного параметрического резонанса.

Рассматривается дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом

$$\dot{x}(t) + x(t) + kf(x(t - h(t, \varepsilon))) = 0, \quad (26)$$

где $k > 0$ некоторый параметр, $f(x) = x + f_2x^2 + f_3x^3 + \dots$, $|x| < x_0$ гладкая функция, $h(t, \varepsilon) = h(1 + \varepsilon a_1 \cos(\omega_1 t + \beta_1) + \varepsilon a_2 \cos(\omega_2 t + \beta_2))$ - величина запаздывания аргумента, в которой $h, \omega_j, a_j > 0$; $0 \leq \beta_j < 2\pi, j = 1, 2$; $0 < \varepsilon \ll 1$.

Изучается возможность и условия возникновения в уравнении (26) сложных, в том числе хаотических, колебательных решений, принадлежащих некоторой фиксированной окрестности нулевого решения уравнения (26) и обусловленных двухчастотным изменением запаздывания малой амплитуды.

Положим в (26) $a_j = 0$ ($j = 1, 2$) и рассмотрим характеристическое уравнение линейной части уравнения (26)

$$\lambda + 1 + k \exp(-\lambda h) = 0. \quad (27)$$

Выберем $k = k_0$ таким образом, чтобы уравнение (27) имело корни $\lambda = \pm i\sigma_0$ ($\sigma_0 > 0$), а остальные корни уравнения (27) при этом имеют отрицательные вещественные части. Положим $k = k_0 + \varepsilon k_1$ и обозначим $\lambda(\varepsilon)$, $\overline{\lambda(\varepsilon)}$, ($\lambda(\varepsilon) = i\sigma_0 + \varepsilon\lambda_1 + \dots$) соответствующие корни уравнения (26). Считаем, что $k_1 < 0$. При этом $\operatorname{Re} \lambda_1 \leq 0$.

Пусть теперь $a_j \neq 0$ ($j = 1, 2$). Положим $\omega_j = 2\sigma_0 + \varepsilon\delta_j$ ($\delta_j \sim 1, j = 1, 2$). Таким образом рассматривается случай двухчастотного параметрического резонанса.

В сформулированных предположениях уравнение (26) имеет в окрестности нуля фазового пространства $C(-h(t, \varepsilon), 0)$ локальное экспоненциально устойчивое интегральное многообразие, поведение решений на котором определяется поведением решений некоторой двумерной нелинейной периодической системы (нормальная форма уравнения (26)).

Приведем вид и численные результаты системы для конкретного значения параметров. Положим в (26) $\beta_1 = \beta_2 = 0$, $h = 3\pi/4$, $f_2 = 0.1$, $f_3 = -1$, $\nu = 1$, $k_1 = -1$. При этом $k_0 = \sqrt{2}$, $\sigma_0 = 1$. В результате с учетом некоторых нормировок нормальная форма уравнения (26) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (-1 + 1.6826a_1 + 1.6826a_2 \cos(t))x + \\ &+ (-0.1906 + 1.6826a_2 \sin(t))y + (x^2 + y^2)(-x + 7.343y), \\ \dot{y} &= (1.6826a_2 \sin(t) + 0.1906)x + \\ &+ (-1 - 1.6826a_1 - 1.6826a_2 \cos(t))y + (x^2 + y^2)(-y - 7.343x). \end{aligned}$$

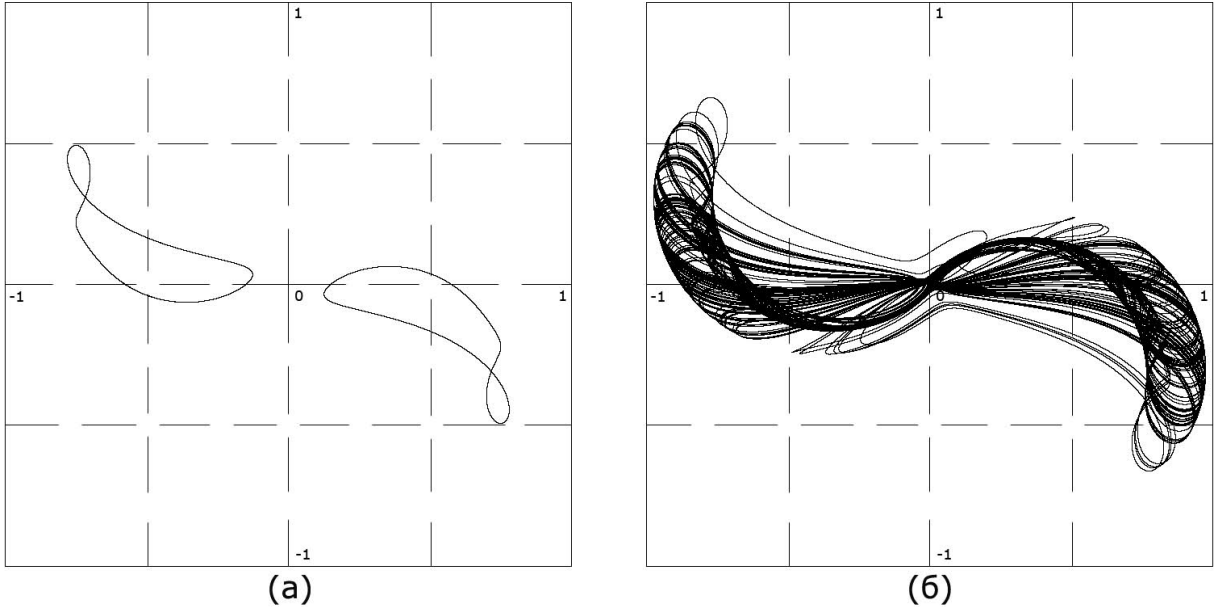


Рис. 8. Проекция аттрактора на плоскость (x, y)

Положим сначала параметр $a_2 = 0$ и будем изменять параметр a_1 от нуля в сторону возрастания. Это соответствует периодическому воздействию

на систему. При $a_1 \approx 0.6069$ нулевое состояние равновесия теряет устойчивость, из которого рождаются два ненулевых устойчивых состояния равновесия. Зафиксируем теперь $a_1 \approx 0.8488$ и будем изменять a_2 . Из этих ненулевых состояний равновесия одновременно бифурцируют при $a_2 \approx 4.244 \cdot 10^{-3}$ два устойчивых цикла. Состояния равновесия при этом теряют устойчивость.

Дальнейшее увеличение параметра a_2 приводит к увеличению амплитуды колебаний периодических решений. На рис. 8(а) представлены проекции периодических решений на плоскость (x, y) при $a_1 \approx 0.8488, a_2 \approx 0.8488$.

При $a_2 \approx 1.1972$ оба цикла теряют одновременно устойчивость, и неустойчивое многообразие первого цикла пересекается с устойчивым многообразием второго, и, наоборот, неустойчивое многообразие второго цикла пересекается с устойчивым многообразием первого. Это приводит к образованию странного аттрактора (хаотического режима), проекция которого на плоскость (x, y) для случая $a_1 \approx 0.8488, a_2 \approx 1.1973$ представлена на рис. 8(б). Для этого случая с помощью программы Tracer²³ были вычислены ляпуновские показатели и ляпуновская размерность; $\lambda_1 \approx 0.1932, \lambda_2 \approx -2.6211, d_L \approx 1.073$.

Дальнейшее увеличение параметра a_2 приводит к исчезновению хаотического аттрактора и образованию периодического решения. Если теперь уменьшать a_2 , то отмеченный выше странный аттрактор возникает из периодического решения через серию бифуркаций удвоения периода.

В **заключении** подводятся основные итоги работы, а также намечаются возможные пути продолжения исследования.

Список публикаций по теме диссертации

Статьи в ведущих рецензируемых журналах:

- 1) *Кубышкин, Е.П.* Параметрическое возбуждение хаотических колебаний в одном дифференциальном уравнении второго порядка с запаздывающим аргументом / Е.П. Кубышкин, А.Ю. Коверга // Моделирование и анализ информационных систем. — 2008. — Т.15. № 2. — С. 67–71.
- 2) *Коверга, А.Ю.* Хаотические колебания одной распределенной динамической системы с бесконечным запаздыванием / А.Ю. Коверга, Е.П. Кубышкин // Моделирование и анализ информационных систем. — 2011. — Т.18. № 1. — С. 46–55.

Другие публикации:

- 3) *Коверга, А.Ю.* Об одной математической модели полупроводникового лазера / А.Ю. Коверга, Е.П. Кубышкин // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды Второй Всероссийской научной конференции / Самарск. гос. тех. ун-т. Самара, 2005. — С. 127–130.

- 4) *Коверга, А.Ю.* Некоторые особенности поведения решений уравнений Ланга-Кобаяши / А.Ю. Коверга, Е.П. Кубышкин // Современные проблемы математики и информатики: Сборник научных трудов молодых ученых, аспирантов и студентов / Яросл. гос. ун-т. Ярославль, 2005. — Вып. 7. — С. 146–150.
- 5) *Коверга, А.Ю.* Характер поведения решений нелинейной системы дифференциальных уравнений в одном критическом случае / А.Ю. Коверга, Е.П. Кубышкин // Математические методы в технике и технологиях - ММТТ-20: Сборник трудов XX Международной науч. конференции в 10 т. / Яросл. гос. техн. ун-т. Ярославль, 2007. — Т. 1. Секция 1 — С. 87–88.
- 6) *Коверга, А.Ю.* Поведения решений нелинейной системы дифференциальных уравнений в критическом случае кратной пары чисто мнимых корней с жордановой клеткой / А.Ю. Коверга, Е.П. Кубышкин // О работе семинара «Нелинейная динамика». Моделирование и анализ информационных систем. — 2007. — Т.14. № 2. — С. 86.
- 7) *Коверга, А.Ю.* Параметрическое возбуждение хаотических колебаний в одном линейном дифференциальном уравнении с запаздывающим аргументом / А.Ю. Коверга, Е.П. Кубышкин // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2008. Тезисы докладов / Воронеж: ВорГУ, 2008. — С. 90.
- 8) Параметрическое возбуждение хаотических колебаний в RC-генераторе с запаздывающей обратной связью / Л.Н. Казаков, [и др.] // Вестник Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова. Серия Естественные и технические науки. — 2009. — № 1 — С. 59–63.
- 9) *Казаков, Л.Н.* Хаотические колебания генератора, обусловленные периодическим изменением запаздывания в обратной связи / Л.Н. Казаков, А.Ю. Коверга, Е.П. Кубышкин // Вестник Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова. Серия Естественные и технические науки. — 2011. — № 1 — С. 70–74.
- 10) *Коверга, А.Ю.* Хаотические колебания одной нелинейной распределенной динамической системы / А.Ю. Коверга // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна - 2012. Материалы международной конференции / Воронеж: Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2012. — С. 102–105.
- 11) *Коверга, А.Ю.* Хаотическое поведение решений одного нелинейного дифференциально-разностного уравнения в случае двухчастотного параметрического резонанса / А.Ю. Коверга, Е.П. Кубышкин // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна - 2012. Материалы

международной конференции / Воронеж: Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2012. — С. 105–107.

- 12) *Коверга, А.Ю.* Специфика возникновения хаотических колебаний в одной нелинейной распределенной динамической системе / А.Ю. Коверга // Моделирование и анализ информационных систем. Труды международной научной конференции, посвященной 35-летию математического факультета и 25-летию факультета информатики и вычислительной техники Ярославского государственного университета им.П.Г. Демидова. — Ярославль, 2012. — С. 116–118.
- 13) *Коверга, А.Ю.* Некоторые особенности двухчастотного параметрического возбуждения колебаний в нелинейных динамических системах / А.Ю. Коверга, Е.П. Кубышкин // Моделирование и анализ информационных систем. Труды международной научной конференции, посвященной 35-летию математического факультета и 25-летию факультета информатики и вычислительной техники Ярославского государственного университета им.П.Г. Демидова. — Ярославль, 2012. — С. 119–121.

Подписано в печать 10.04.12. Формат 60x84/16.

Бумага оф. Отпечатано на ризографе.

Тираж 100 экз. Заказ 19/12.

Отдел оперативной полиграфии ЯрГУ
150000, Ярославль, ул. Советская, 14.