На правах рукописи

Кащенко Александра Андреевна

УСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОГО КЛАССА АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ В СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМАХ

01.01.02 — Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ярославль – 2015

Работа выполнена на кафедре математического моделирования федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова»

Научный руководитель —	доктор физико-математических наук, профессор Глызин Сергей Дмитриевич,
Официальные оппоненты:	Нефёдов Николай Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова», заведующий кафедрой математики;
	Малинецкий Георгий Геннадьевич, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБУН Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, заведующий отделом моделирования нелинейных процессов.
Ведущая организация —	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН.

Защита состоится «11» декабря 2015 г. в 13:00 на заседании диссертационного совета Д 212.002.05 при Ярославском государственном университете им П.Г. Демидова по адресу: 150000, г. Ярославль, ул. Советская, д. 14.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова (150000, г. Ярославль, ул. Полушкина роща, д. 1) и на официальном сайте организации: http://www.uniyar.ac.ru/

Автореферат разослан «   » ноября 2015 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета — Глызин С.Д.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования

Во многих физических явлениях и процессах естественным образом может быть выделен малый или большой параметр, в связи с чем математические модели этих явлений и процессов могут оказаться сингулярно возмущенными динамическими системами. Исследование свойств решений уравнений такого типа очевидным образом представляет большой интерес. Автомодельные циклы являются важным классом решений, поскольку с одной стороны они имеют достаточно простой вид, что позволяет получить содержательные результаты об их существовании и устойчивости, с другой стороны они являются решениями общего вида, что позволяет ответить на ряд вопросов о динамике уравнений. Более того, решения в виде автомодельных циклов вполне адекватно описывают некоторые волновые процессы. Модели, рассмотренные в данной работе, применяются в задачах оптоэлектроники, популяционной динамики, при описании групповых свойств волновых пакетов различной природы, турбулентных процессов, а также в теории сверхпроводимости и теории сверхтекучести. Уравнения Гинзбурга-Ландау и Стюарта-Ландау являются базовыми моделями для широкого класса систем с распределенными параметрами и систем с запаздыванием, поэтому при выполнении ряда условий их устойчивым решениям могут быть сопоставлены устойчивые решения исходных достаточно сложных задач.

Цель работы

Целью диссертационной работы является изучение вопросов существования, построение асимптотики и исследование устойчивости автомодельных циклов для ряда актуальных математических моделей, описывающих большой класс нелинейных волновых явлений в динамических системах с параметрами, распределенными по времени и пространству. Рассматривались уравнение Гинзбурга-Ландау, уравнение Стюарта-Ландау, модель FDML лазера, система уравнений Лэнга-Кобаяши.

Для каждой из этих моделей были выделены следующие **задачи**:

1. Нахождение условий существования семейств автомодельных циклов. Построение асимптотики решений.

2. Получение достаточных условий устойчивости и неустойчивости отдельных решений для произвольных значений параметров.

3. Выделение областей устойчивости на множествах, задающих условие существования решений.

Методы исследования

В представленной работе используются в основном аналитические методы. В некоторых случаях применяются численно-аналитические методы.

Среди аналитических методов ключевое значение имеют методы малого параметра и метод асимптотических разложений.

Научная новизна

Научная новизна работы проявляется в следующем:

1. Описаны однопараметрические семейства бегущих волн и найдены достаточные условия устойчивости и неустойчивости решений данного вида в уравнении Гинзбурга-Ландау с малой диффузией и периодическими краевыми условиями. Показано, что может сосуществовать асимптотически большое число устойчивых бегущих волн.

2. При исследовании задачи существования автомодельных решений для уравнений с запаздыванием выяснилось, что изучаемые решения разрывно зависят от бифуркационного параметра. В асимптотику по малому параметру входят коэффициенты, зависящие от фазового сдвига, который при уменьшении параметра бесконечно много раз изменяется на промежутке периода. Данный вид решений позволяет описать семейство из асимптотически большого числа сосуществующих автомодельных решений. На двумерной плоскости построены специальные кривые, определяющие условие существования решений искомого вида.

3. Изучена устойчивость автомодельных циклов для уравнений с большим запаздыванием. Найдены достаточные условия устойчивости и неустойчивости данных решений. На построенных кривых выделены области устойчивости. Показано, что характерным является свойство гипермультистабильности (то есть сосуществования сколь угодно большого конечного числа устойчивых решений при стремлении малого параметра к нулю).

Положения, выносимые на защиту

1. Получены достаточные условия устойчивости и неустойчивости специальных семейств бегущих волн в уравнении Гинзбурга–Ландау с малой диффузией и периодическими краевыми условиями.

2. Для уравнения Стюарта-Ландау с большим запаздыванием в области параметров построены специальные кривые, задающие условия существования семейства простейших периодических решений. На этих кривых выделены области устойчивости и неустойчивости. Найдено асимптотическое приближение данных решений. Получены достаточные условия устойчивости и неустойчивости простейших периодических решений.

3. Сформулирована и доказана теорема существования семейства непрерывных волн для модели лазера с „синхронизацией мод в частотном диапазоне“ с большим временем обхода резонатора. Найдены достаточные условия устойчивости и неустойчивости автомодельных циклов уравнения, получающегося из данной модели.

4. Найдены условия существования семейства непрерывных волн для модели полупроводникового лазера с большим временем обхода резонатора. Получены достаточные условия устойчивости и неустойчивости автомодельных циклов уравнения, получающегося из данной модели.

5. Показано, что во всех изучаемых моделях может встречаться явление гипермультистабильности.

Теоретическая и практическая значимость работы

Диссертация в своей основе носит теоретический характер, но для ряда предложенных в ней моделей, например, уравнения Гинзбурга-Ландау, модели FDML лазера, системы Лэнга-Кобаяши, результаты имеют важное прикладное значение. Построенные в работе семейства решений позволяют использовать их свойства при анализе широкого класса динамических систем из различных приложений. Изложенная в диссертации схема исследования расположения корней характеристических квазиполиномов может быть использована для решения других прикладных задач. Результаты, относящиеся к моделям лазерной динамики, могут применяться для исследования различных режимов работы оптоэлектронных систем.

Личный вклад соискателя

Все результаты, представленные в диссертационной работе, получены автором самостоятельно. Постановка задач выполнялась совместно с научным руководителем.

Апробация работы

Основные результаты работы были представлены на следующих научных конференциях и семинарах: всероссийская конференция «Дифференциальные уравнения и их приложения» (Самара, 2011 г.), XVI международная конференция-школа «Foundations and Advances in Nonlinear Science» (Минск, 2012 г.), международная студенческая конференция «Science and Progress» (Санкт-Петербург, 2012 г.), международная конференция «Dynamics, Bifurcations and Strange Attractors», посвященная памяти Л.П. Шильникова (Нижний Новгород, 2013 г.), международная молодежная научно-практическая конференция «Путь в науку» (Ярославль, 2013 г.), международная студенческая конференция «Science and Progress» (Санкт-Петербург, 2013 г.), международная конференция «Нелинейная динамика и ее приложения», посвященная 150-летию со дня рождения Поля Пенлеве (Ярославль, 2013 г.), X международная школа-конференция «Хаотические автоколебания и образование структур» (Саратов, 2013 г.), международная конференция «Нелинейные явления в задачах современной математики и физики», посвященная 210-летию Демидовского университета (Ярославль, 2013 г.), международный научный семинар «Актуальные проблемы математической физики» (Москва, 2014 г.), научная сессия НИЯУ МИФИ-2015 (Москва, 2015 г.), международный семинар «Nonlinear Photonics: Theory, Materials, Applications» (Санкт-Петербург, 2015 г.).

Частично результаты диссертационной работы получены в процессе выполнения работ по проекту 1875 госзадания на НИР №2014/258 и по проекту 984 в рамках базовой части государственного задания на НИР ЯрГУ.

Представленные результаты неоднократно докладывались на семинаре «Нелинейная динамика и синергетика» кафедры математического моделирования Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова.

Публикации

По теме диссертации автором опубликовано 9 статей и 11 тезисов докладов, в том числе 6 статей в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК. Список публикаций приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы, содержащего 84 наименования. Диссертация содержит 16 рисунков. Общий объем диссертации составляет 92 страницы.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** приводится общая характеристика работы, обосновывается актуальность выбранного направления исследования, проводится краткий обзор литературы по рассматриваемой тематике, отмечаются исходные положения, описываются цели и постановка основных задач работы, отмечаются научная новизна и значимость результатов, а также выносимые на защиту положения.

В **первой главе** диссертационной работы рассматриваются вопросы существования и устойчивости автомодельных циклов для двух распределенных моделей, получающихся из одного и того же дифференциального уравнения

$$\dot{u} = (1 - (1 + ib)|u|^2)u.$$

В первом случае u зависит еще и от пространственной переменной x. Тогда к правой части данного уравнения добавляется слагаемое $\varepsilon^2(1 + id)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, в результате чего получается распределенное по пространству уравнение с краевыми условиями

$$u(t, x) \equiv u(t, x + 2\pi).$$

Во втором случае рассматривается распределение по времени, которое представлено в виде слагаемого $\gamma e^{i\varphi}(u(t - T) - u)$.

В **параграфе 1.1** рассматривается уравнение Гинзбурга-Ландау[1] с малой диффузией

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (1 - (1 + ib)|u|^2)u + \varepsilon^2(1 + id)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1)$$

и периодическими краевыми условиями

$$u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x). \qquad (2)$$

Здесь u — комплекснозначная функция, ε — малый положительный параметр, параметры b и d — действительные.

Уравнение Гинзбурга–Ландау возникает при описании большого класса нелинейных волновых явлений в пространственно распределенных системах[2] и при исследовании локальной динамики широкого класса уравнений с распределенными параметрами[3] и с запаздыванием[4].

В данной работе непосредственной проверкой находится, что краевая задача (1), (2) при $\varepsilon^2 k^2 < 1$ имеет семейство решений вида бегущих волн: $u_k = \rho_k e^{i\omega_k t + ikx}$, где

$$\rho_k = \sqrt{1 - \varepsilon^2 k^2}, \quad \omega_k = -b(1 - \varepsilon^2 k^2) - \varepsilon^2 dk^2,$$

k — целое. В фазовом пространстве $W_2^2(0, 2\pi)$ исследуется экспоненциальная орбитальная устойчивость бегущих волн краевой задачи (1), (2) при достаточно малых значениях параметра ε.

Относительно устойчивости бегущих волн краевой задачи (1), (2) выполнены приведенные ниже результаты.

Теорема 1. *Пусть выполнено неравенство $bd + 1 < 0$. Фиксируем некоторую достаточно малую положительную величину δ, которая не зависит от параметра ε. Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ все бегущие волны u_k с номерами из диапазона $k \in (-\varepsilon^{-1} + \delta, \varepsilon^{-1} - \delta)$ неустойчивы.*

Следующее утверждение представляет собой объединение результатов теорем 2 и 3 диссертационной работы.

Теорема 2-3. *Пусть выполнено неравенство $bd + 1 > 0$. Фиксируем некоторую достаточно малую положительную величину δ, которая не зависит от параметра ε. Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$*

---

[1] *Гинзбург, В.И.* К теории сверхпроводимости / *В.И. Гинзбург, Л.Д. Ландау* // ЖЭТФ. — 1950. — Т. 20. — С. 1064.

[2] *Aranson, I.* The world of cubic Ginzburg-Landau equation / *I. Aranson, L. Kramer* // Rev. Mod. Phys. — 2002. — V. 74. — P. 99–143.

[3] *Васильева, А.Б.* Бифуркация автоколебаний нелинейных параболических уравнений с малой диффузией / *А.Б. Васильева, С.А. Кащенко, Ю.С. Колесов, Н.Х. Розов* // Матем. сб. — 1986. — Т. 130(172), № 4(8). — С. 488–499.

[4] *Кащенко, С.А.* Уравнение Гинзбурга–Ландау — нормальная форма для дифференциально-разностного уравнения второго порядка с большим запаздыванием / *С.А. Кащенко* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1998. — Т. 38, № 3, С. 457–465.

все бегущие волны u_k с номерами из диапазона $k \in (-z_{min}\varepsilon^{-1}+\delta, z_{min}\varepsilon^{-1}-\delta)$ устойчивы, а все волны с номерами из диапазона $k \in (-\varepsilon^{-1}+\delta, -z_2\varepsilon^{-1}-\delta) \cup (z_2\varepsilon^{-1}+\delta, \varepsilon^{-1}-\delta)$ неустойчивы.

Здесь $z_{min} = \min\{z_2, z_4, z_6\}$, а величины z_2, z_4 и z_6 определяются по формулам

$$z_2 = \sqrt{\frac{bd+1}{2b^2+bd+3}}, \quad z_4 = \sqrt{\frac{5+4bd+d^2}{13+12bd+d^2}}, \quad z_6 = \sqrt{\frac{2+bd+d^2}{4+bd+3d^2}}.$$

При выполнении системы неравенств $bd+1>0, \quad |b| \geqslant |d|$ выражение $z_{min} = z_2$. Отсюда получаем следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть выполнены неравенства $bd+1>0$ и $|b| \geqslant |d|$. Фиксируем некоторую достаточно малую положительную величину δ, которая не зависит от параметра ε. Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ бегущая волна u_k устойчива, если $|k| < z_2\varepsilon^{-1}-\delta$, и неустойчива, если $z_2\varepsilon^{-1}+\delta < |k| < \varepsilon^{-1}-\delta$.*

Таким образом, при условии $bd+1>0$ сосуществуют несколько устойчивых волн. Более того, с уменьшением положительного параметра ε количество сосуществующих устойчивых волн растет. Количество устойчивых бегущих волн имеет порядок $O(\varepsilon^{-1})$ при $\varepsilon \to 0$.

В **параграфе 1.2** рассматривается уравнение Стюарта-Ландау с запаздыванием:

$$\dot{u} = (1+(-1+ic)|u|^2)u + \gamma e^{i\varphi}(u(t-T)-u).$$

Здесь параметр c действительный, величины γ и T положительные, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Это уравнение моделирует простейший осциллятор с запаздывающей обратной связью[5]. В частности, на примере данной модели изучалось управление устойчивостью периодических орбит уравнения $\dot{u} = (1-(1-ic)|u|^2)u$ с помощью добавления в уравнение линейной обратной связи с величиной запаздывания T, пропорциональной величине периода решения[6].

Ниже запаздывание считается достаточно большим: $T \gg 1$. После замены времени $t \to Tt$ и обозначения $\varepsilon = 1/T$ уравнение Стюарта-Ландау принимает вид

$$\varepsilon\dot{u} = (1+(-1+ic)|u|^2)u + \gamma e^{i\varphi}(u(t-1)-u). \tag{3}$$

Ставится задача изучить условия существования семейства простейших периодических решений, то есть решений уравнения (3) вида

$$u_{R,\Lambda} = R\exp(i\Lambda t), \tag{4}$$

[5] *Reddy, D.V.R.* Dynamics of a limit cycle oscillator under time delayed linear and nonlinear feedbacks / *D.V.R. Reddy, A. Sen, G.L. Johnston* // Physica D. — 2000. — V. 144. — P. 335–357.

[6] *Fiedler, B.* Beyond the odd number limitation of time-delayed feedback control / *B. Fiedler, V. Flunkert, M. Georgi, P. Hövel, E. Schöll* // Handbook of chaos control. — 2008. — P. 73–84.

где R, Λ — действительные константы, $R > 0$; и экспоненциальную орбитальную устойчивость решений (4) в фазовом пространстве $C[-1, 0]$ при всех достаточно малых значениях положительного параметра ε.

Для того, чтобы получить семейство решений вида (4), R и Λ отыскивались в специальном виде:

$$R = R_n(\varepsilon) = \rho + \varepsilon v(\varepsilon), \quad \Lambda = \Lambda_n(\varepsilon) = \omega\varepsilon^{-1} + \theta + \Omega + 2\pi n + \varepsilon d(\varepsilon).$$

Здесь ρ — положительная константа, ω — действительная постоянная, Ω — постоянная из полуинтервала $[0, 2\pi)$, n — целое число, а $v(\varepsilon)$ и $d(\varepsilon)$ — некоторые действительные функции, ограниченные при $\varepsilon \to 0$. Функция $\theta = \theta(\omega, \varepsilon)$ принимает такое значение из полуинтервала $[0, 2\pi)$, для которого величина $\omega/\varepsilon + \theta$ нацело делится на 2π.

Условие существования семейства решений данного вида состоит в том, что на плоскости $\omega O \rho^2$ точки (ω, ρ^2) должны принадлежать множеству $L(c, \gamma, \varphi)$. Здесь $L(c, \gamma, \varphi)$ — множество точек, принадлежащих кривой

$$(\rho^2 - 1 + \gamma\cos\varphi)^2 + (\omega - c\rho^2 + \gamma\sin\varphi)^2 = \gamma^2.$$

Величина Ω для каждой точки множества $L(c, \gamma, \varphi)$ определяется как корень уравнения

$$(i\omega - 1 + (1 - ic)\rho^2 + \gamma e^{i\varphi})\gamma^{-1} e^{-i\varphi} = e^{-i\Omega},$$

принадлежащий полуинтервалу $[0, 2\pi)$.

Доказана следующая теорема существования.

Теорема 5. *Для каждой точки (ω_0, ρ_0^2), принадлежащей $L(c, \gamma, \varphi)$, кроме, возможно, двух и для любого целого числа n при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ уравнение (3) имеет цикл вида (4). Вещественные величины $R = R_n(\varepsilon)$ и $\Lambda = \Lambda_n(\varepsilon)$ таковы, что $R_n(\varepsilon) = \rho_0 + \varepsilon v(\varepsilon)$, $\Lambda_n(\varepsilon) = \omega_0/\varepsilon + \theta + \Omega + 2\pi n + \varepsilon d(\varepsilon)$, где функции $v(\varepsilon)$ и $d(\varepsilon)$ ограничены при $\varepsilon \to 0$.*

При изучении устойчивости решений предполагалось, что выражение $\cos(\varphi - \Omega) - c\sin(\varphi - \Omega) \neq 0$. Это достаточно общее предположение, поскольку оно нарушается не более, чем в двух точках множества $L(c, \gamma, \varphi)$.

Для формулировки результатов об устойчивости введем некоторые обозначения. Пусть $\rho_{up}^2 = \gamma - \gamma\cos\varphi + 1$, $\omega_{up} = c\rho_{up}^2 - \gamma\sin\varphi$, $\psi = \varphi - \Omega$,

$$\begin{gathered}
H(z) = \gamma^3 z^3 - \gamma^2(\gamma + 4\rho^2\cos\psi + 2\gamma\cos^2\psi - 2c\rho^2\sin\psi)z^2 + \gamma(c^2\rho^4\sin^2\psi + \\
+ 4\gamma\rho^2\cos\psi + 4\gamma^2\cos^2\psi + 3\rho^4\cos^2\psi + 4\gamma\rho^2\cos^3\psi - \gamma^2 - 4c\rho^4\cos\psi\sin\psi - \\
- 4c\gamma\rho^2\cos^2\psi\sin\psi + 2\rho^4)z + \gamma^3 - 2\rho^6\cos\psi - 2\gamma^3\cos^2\psi - 5\gamma\rho^4\cos^2\psi - \\
- 4\gamma^2\rho^2\cos^3\psi - 2c\gamma^2\rho^2\sin\psi + 2c\rho^6\sin\psi + 4c\gamma\rho^4\cos\psi\sin\psi + \\
+ 4c\gamma^2\rho^2\cos^2\psi\sin\psi + c^2\gamma\rho^4\sin^2\psi,
\end{gathered}$$

$$
\begin{cases}
\rho^2 - \dfrac{\gamma(1+c^2)\sin^2(\varphi-\Omega)}{\cos(\varphi-\Omega)-c\sin(\varphi-\Omega)} > 0,\\
\cos(\varphi-\Omega)-c\sin(\varphi-\Omega) > 0,\\
\rho^2 + 2\gamma\cos(\varphi-\Omega) > 0,
\end{cases} \tag{5}
$$

$$
\left[
\begin{array}{l}
\rho^2 - \dfrac{\gamma(1+c^2)\sin^2(\varphi-\Omega)}{\cos(\varphi-\Omega)-c\sin(\varphi-\Omega)} < 0,\\
\cos(\varphi-\Omega)-c\sin(\varphi-\Omega) < 0,\\
\rho^2 + \gamma\cos(\varphi-\Omega) < 0.
\end{array}
\right. \tag{6}
$$

Получены следующие результаты об устойчивости.

Теорема 8. *Пусть для некоторой точки* (ω_0, ρ_0^2) *множества* $L(c, \gamma, \varphi)$ *выполнена система неравенств* (5), *а уравнение* $H(z) = 0$ *не имеет корней ни при каком* $z \in [-1, 1]$ *для всех точек кратчайшей дуги* $L(c, \gamma, \varphi)$, *соединяющей точки* $(\omega_{up}, \rho_{up}^2)$ *и* (ω_0, ρ_0^2). *Тогда для каждого целого* n *существует такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что при всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *решение* (4) *уравнения* (3) *с* $\omega = \omega_0$ *и* $\rho^2 = \rho_0^2$ *устойчиво.*

Теорема 9. *Пусть для некоторой точки* (ω_0, ρ_0^2) *множества* $L(c, \gamma, \varphi)$ *выполнена совокупность неравенств* (6). *Тогда для каждого целого* n *существует такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что при всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *решение* (4) *уравнения* (3) *с* $\omega = \omega_0$ *и* $\rho^2 = \rho_0^2$ *неустойчиво.*

Будем говорить, что точка (ω_0, ρ_0^2) множества $L(c, \gamma, \varphi)$ принадлежит области устойчивости, если все решения (4) уравнения (3) с $\rho^2 = \rho_0^2$ и $\omega = \omega_0$ устойчивы при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Относительно расположения областей устойчивости на множестве $L(c, \gamma, \varphi)$ получены следующие результаты:

1. Доказано, что при любых значениях c, γ, φ на множестве $L(c, \gamma, \varphi)$ есть хотя бы одна точка с устойчивыми решениями и хотя бы одна с неустойчивыми.

2. Доказано, что на множестве $L(0, \gamma, \varphi)$ расположена односвязная область устойчивости и одна или две области неустойчивости.

Во **второй главе** изучаются вопросы существования и устойчивости непрерывных волн для двух моделей лазерной динамики.

В **параграфе 2.1** рассматривается модель лазера с синхронизацией мод в частотном диапазоне (в англоязычной литературе принята аббревиатура FDML[7]), предложенная А. Г. Владимировым с соавторами[8],

$$
\begin{aligned}
\dot{A} + A - i\Delta A &= \sqrt{\kappa} e^{(1-i\alpha)G(t-T)/2} A(t-T),\\
\dot{G} &= \gamma(g_0 - G - G|A|^2).
\end{aligned}
$$

[7] *Huber, R.* Fourier Domain Mode Locking (FDML): A new laser operating regime and applications for optical coherence tomography / *R. Huber, M. Wojtkowski, J.G. Fujimoto* // Opt. Express. — 2006. — V. 14. — P. 3225–3237.

[8] *Slepneva, S.* Dynamics of Fourier domain mode-locked lasers / *S. Slepneva, B. Kelleher, B. O'Shaughnessy, S.P. Hegarty, A.G. Vladimirov, G. Huyet* // Opt. Express. — 2013. — V. 21. — P. 19240–19251.

Здесь все параметры Δ, α, κ, T, γ, g_0 принимают действительные значения, причем параметры γ и g_0 положительные, $0 < \kappa < 1$, а время запаздывания является достаточно большим: $T \gg 1$.

После перенормировки времени $t \to Tt$, обозначения $\varepsilon = 1/T$ и замены $A(t) = e^{i\Delta t/\varepsilon}a(t)$, данная модель принимает вид

$$\begin{aligned} \varepsilon\dot{a} + a &= \sqrt{\kappa}e^{(1-i\alpha)G(t-1)/2}a(t-1)e^{-i\Delta/\varepsilon}, \\ \varepsilon\dot{G} &= \gamma(g_0 - G - G|a|^2). \end{aligned} \tag{7}$$

Изучается задача о существовании семейства непрерывных волн, то есть решений уравнения (7) вида

$$a = Re^{i\Phi t}, \qquad G = G_0, \tag{8}$$

где R, Φ и G_0 действительные и не зависят от времени, $R > 0$ и $G_0 > 0$.

Как и в параграфе 1.2, величины R и Φ искались в виде

$$R = R_n = \rho + \varepsilon v(\varepsilon), \quad \Phi = \Phi_n = \delta/\varepsilon + \theta + \Omega + 2\pi n + \varepsilon d(\varepsilon).$$

Здесь ρ — положительная постоянная, δ — действительная константа, Ω — постоянная из полуинтервала $[0, 2\pi)$, n — целое число, а $v = v(\varepsilon)$ и $d = d(\varepsilon)$ некоторые действительные функции, ограниченные при $\varepsilon \to 0$. Функция $\theta = \theta(\Delta, \delta, \varepsilon)$ принимает такое значение из полуинтервала $[0, 2\pi)$, что $(\Delta + \delta)/\varepsilon + \theta$ нацело делится на 2π.

Условие существования семейства решений данного вида заключается в том, что точки (δ, ρ^2) должны принадлежать множеству $\Gamma(\kappa, g_0)$ таких точек, для которых выполнено равенство

$$\delta^2 = \kappa\exp(g_0(1+\rho^2)^{-1}) - 1.$$

Необходимым и достаточным условием непустоты множества $\Gamma(\kappa, g_0)$ является выполнение неравенства

$$\kappa e^{g_0} - 1 > 0. \tag{9}$$

Величина Ω для каждой точки (δ, ρ^2) множества $\Gamma(\kappa, g_0)$ определяется как корень уравнения

$$i\delta + 1 = \sqrt{\kappa}\exp\left(g_0/2(1-i\alpha)(1+\rho^2)^{-1} - i\Omega\right)$$

из полуинтервала $[0, 2\pi)$.

Выполнена следующая теорема существования.

Теорема 11. *Пусть выполнено неравенство* (9). *Тогда для каждой точки* (δ_0, ρ_0^2) *множества* $\Gamma(\kappa, g_0)$ *и для каждого целого* n *при всех достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *существует решение* (8) *системы* (7), *где* $R = R_n = \rho_0 + \varepsilon v(\varepsilon)$,

$\Phi = \Phi_n = \delta_0/\varepsilon + \theta + \Omega + 2\pi n + \varepsilon d(\varepsilon)$, $G_0 = g_0(1 + (\rho_0 + \varepsilon v(\varepsilon))^2)^{-1}$, *а функции* $v(\varepsilon)$ *и* $d(\varepsilon)$ *ограничены при* $\varepsilon \to 0$.

Для изучения устойчивости решений был осуществлен переход к более простой постановке задачи. Решение $G = G_0$ второго уравнения системы (7) было представлено как функция от $|a|^2$:

$$G = g_0(1 + |a|^2)^{-1}.$$

После подстановки данного выражения в первое уравнение системы (7) получилось следующее уравнение на функцию a:

$$\varepsilon \dot{a} + a = \sqrt{\kappa} \exp\left(\frac{g_0(1 - i\alpha)}{2(1 + |a(t-1)|^2)}\right) a(t-1) e^{-i\Delta/\varepsilon}. \tag{10}$$

Для каждого фиксированного целого n и точки (δ, ρ^2) из множества $\Gamma(\kappa, g_0)$ при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ у уравнения (10) есть решение

$$a = (\rho + \varepsilon v(\varepsilon)) \exp[i(\delta/\varepsilon + \theta + \Omega + 2\pi n + \varepsilon d(\varepsilon))t]. \tag{11}$$

Была поставлена задача найти такие условия устойчивости (неустойчивости), что для каждого целого n при всех достаточно малых значениях параметра $\varepsilon > 0$ решения вида (11) уравнения (10) экспоненциально орбитально устойчивы (неустойчивы) в фазовом пространстве $C[-1, 0]$.

Для формулировки результатов об устойчивости введем некоторые обозначения. Пусть $\rho^2_{max} = g_0 \ln^{-1}(\kappa^{-1}) - 1$, $w = \kappa \exp(g_0(1 + \rho^2)^{-1})$, $y = g_0\rho^2(1 + \rho^2)^{-2}$,

$$\begin{aligned} q(z) = \big(16 - 8(2+\alpha\delta)y + 2(2+3\alpha\delta+\alpha^2\delta^2)y^2 - (1+\alpha\delta)^2 y^3 + w(-4+8y-3y^2)\big)z + \\ + 4(1-y)(-2-w+(1+\alpha\delta)y)z^2 + w(-2+y)^2 - 2(4 - 2(1+\alpha\delta)y + (1+\alpha\delta)y^2) + \\ + 4w(-1+y)^2 z^3, \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2(1+\rho^2)^2\delta^2(1+\alpha^2) - g_0\rho^2(1+\alpha\delta)^2 < 0, \\ g_0\rho^2(1+\rho^2)^{-2} < 2, \\ -1 < \alpha\delta < 4(1+\rho^2)^2 g_0^{-1}\rho^{-2} - 1, \end{cases} \tag{12}$$

$$\left[\begin{array}{l} 2(1+\rho^2)^2\delta^2(1+\alpha^2) - g_0\rho^2(1+\alpha\delta)^2 > 0, \\ g_0\rho^2(1+\rho^2)^{-2} > 2. \end{array}\right. \tag{13}$$

Получены следующие утверждения об устойчивости автомодельных циклов (11) уравнения (10).

Теорема 12. *Пусть в точке* $(0, \rho^2_{max})$ *кривой* $\Gamma(\kappa, g_0)$ *выполнено второе неравенство системы* (12). *Пусть в точке* (δ_0, ρ_0^2) *кривой* $\Gamma(\kappa, g_0)$ *выполнена система* (12), *а уравнение* $q(z) = 0$ *не имеет корней на отрезке* $[-1, 1]$ *для всех точек дуги кривой* $\Gamma(\kappa, g_0)$, *соединяющей точки* $(0, \rho^2_{max})$ *и* (δ_0, ρ_0^2). *Тогда для каждого целого* n *существует такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что для всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *решение* (11) *уравнения* (10) *с* $\delta = \delta_0$ *и* $\rho^2 = \rho_0^2$ *устойчиво.*

Теорема 13. *Пусть в точке* (δ_0, ρ_0^2) *кривой* $\Gamma(\kappa, g_0)$ *выполнена совокупность* (13). *Тогда для каждого целого* n *существует такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что для всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *решение* (11) *уравнения* (10) *с* $\delta = \delta_0$ *и* $\rho^2 = \rho_0^2$ *неустойчиво.*

Будем говорить, что точка (δ_0, ρ_0^2) множества $\Gamma(\kappa, g_0)$ принадлежит области устойчивости, если все решения (11) уравнения (10) с $\rho^2 = \rho_0^2$ и $\delta = \delta_0$ устойчивы при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Относительно расположения областей устойчивости на множестве $\Gamma(\kappa, g_0)$ получены следующие результаты:

1. Доказано, что при любых значениях параметров κ, α, g_0 вся кривая $\Gamma(\kappa, g_0)$ полностью устойчивой быть не может, найдены примеры полностью неустойчивых кривых $\Gamma(\kappa, g_0)$.

2. В случае $\alpha = 0$ показано, что областей устойчивости на кривой $\Gamma(\kappa, g_0)$ может быть от нуля до трех включительно. Аналитически найдены границы подобластей в области параметров (g_0, κ), в каждой из которых свое число областей устойчивости. Более того, в каждой из данных подобластей найдены координаты (δ, ρ^2) границ областей устойчивости.

В **параграфе 2.2** рассматривается система уравнений, предложенная Лэнгом и Кобаяши[9]

$$\begin{gathered}\dot{E} = \tfrac{1}{2}v(1 + i\alpha)(y - 1)E + \gamma \exp(i\varphi)E(t - T),\\ \dot{y} = q - y - y|E|^2.\end{gathered}$$

Здесь параметры v, γ, q положительны, величина α действительная, параметр φ принадлежит полуинтервалу $[0, 2\pi)$.

Во многих работах исследовалась динамика модели Лэнга-Кобаяши для фиксированных значений параметра запаздывания. В частности, были обнаружены различные сценарии перехода к хаосу[10,11,12], найден численный пример сосуществования более десяти аттракторов (циклов и торов)[13].

Ниже предполагается, что параметр T является достаточно большим: $T \gg 1$. После перенормировки времени $t \to Tt$ и замены $\varepsilon = 1/T$, система уравнений Лэнга-Кобаяши принимает вид

$$\begin{gathered}\varepsilon\dot{E} = \tfrac{1}{2}v(1 + i\alpha)(y - 1)E + \gamma \exp(i\varphi)E(t - 1),\\ \varepsilon\dot{y} = q - y - y|E|^2.\end{gathered} \tag{14}$$

---

[9] *Lang, R.* External optical feedback effects on semiconductor injection laser properties / *R. Lang, K. Kobayashi* // Quantum Electronics. — 1980. — V. 16, No. 3. — P. 347–355.

[10] *Mork, J.* Chaos in semiconductor lasers with optical feedback: theory and experiment / *J. Mork, B. Tromborg, J. Mark* // J. Quant. Electr. — 1992. — V. 28. — P. 93–108.

[11] *Ye, J.* Period-doubling route to chaos in a semiconductor laser with weak optical feedback / *J. Ye, H. Li, J.G. McInerney* // Physical Review A. — 1993. — V. 47, No. 3. — P. 2249–2252.

[12] *Fischer, I.* High-dimensional chaotic dynamics of an external cavity semiconductor laser / *I. Fischer, O. Hess, W. Elsässer, E. Göbel* // Phys. Rev. Lett. — 1994. — V. 73. — P. 2188–2191.

[13] *Masoller, C.* Stability and dynamical properties of the coexisting attractors of an external-cavity semiconductor laser / *C. Masoller, N.B. Abraham* // Phys. Rev. A. — 1998. — V. 57. — P. 1313–1322.

Решается задача о существовании семейства непрерывных волн, то есть решений вида

$$E = R\exp(i\Delta t), \qquad y = Y. \tag{15}$$

Здесь положительные параметры R и Y не зависят от времени, а Δ — действительная константа.

Как и в параграфах 1.2 и 2.1, величины R и Δ искались в виде

$$R = R_n = \rho + \varepsilon w(\varepsilon), \quad \Delta = \Delta_n = \delta/\varepsilon + \theta + \Omega + 2\pi n + \varepsilon d(\varepsilon).$$

Здесь ρ — положительная константа, δ — действительная постоянная, Ω — постоянная из полуинтервала $[0, 2\pi)$, n — целое число, а $w = w(\varepsilon)$ и $d = d(\varepsilon)$ действительные, ограниченные при $\varepsilon \to 0$ функции. Функция $\theta = \theta(\varepsilon, \delta)$ принимает такое значение из полуинтервала $[0, 2\pi)$, что выражение $\delta/\varepsilon + \theta$ делится нацело на 2π.

Условие существования семейства непрерывных волн состоит в том, что точки $(\delta, (1+\rho^2)^{-1})$ должны принадлежать множеству $I(v, \alpha, q, \gamma)$. Здесь $I(v, \alpha, q, \gamma)$ — множество точек $(\delta, (1+\rho^2)^{-1})$, таких, что выполняется равенство

$$(\delta - 1/2v\alpha(q(1+\rho^2)^{-1} - 1))^2 + 1/4v^2(q(1+\rho^2)^{-1} - 1)^2 = \gamma^2.$$

Необходимым и достаточным условием непустоты данного множества является выполнение неравенства

$$v - 2\gamma < qv. \tag{16}$$

Величина Ω для каждой точки множества $I(v, \alpha, q, \gamma)$ определяется как корень уравнения

$$i(\delta - 1/2v\alpha(q(1+\rho^2)^{-1} - 1)) - 1/2v(q(1+\rho^2)^{-1} - 1) = \gamma\exp(i(\varphi - \Omega))$$

из полуинтервала $[0, 2\pi)$.

Выполнена следующая теорема существования.

Теорема 15. *Пусть выполнено неравенство* (16). *Тогда для каждого целого значения n и каждой точки $(\delta_0, (1+\rho_0^2)^{-1})$, принадлежащей кривой $I(v, \alpha, q, \gamma)$, кроме, возможно, двух для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ существует решение* (15) *системы* (14), *где $R = R_n = \rho_0 + \varepsilon w(\varepsilon)$, $\Delta = \Delta_n = \delta_0/\varepsilon + \theta + \Omega + 2\pi n + \varepsilon d(\varepsilon)$, $Y = q(1 + (\rho_0 + \varepsilon w(\varepsilon))^2)^{-1}$, а функции $w(\varepsilon)$ и $d(\varepsilon)$ ограничены при $\varepsilon \to 0$.*

При изучении устойчивости решений предполагалось, что выражение $\cos(\varphi - \Omega) + \alpha\sin(\varphi - \Omega) \neq 0$. Это достаточно общее предположение, поскольку оно нарушается не более, чем в двух точках множества $I(v, \alpha, q, \gamma)$. Был осуществлен переход к более простой постановке задачи. Решение $y = Y$ второго уравнения системы (14) было представлено как функция от $|E|$:

$$y = q(1 + |E|^2)^{-1}$$

и подставлено в первое уравнение системы (14). Получилось следующее уравнение на функцию E:

$$\varepsilon\dot{E} = 1/2v(1+i\alpha)(q(1+|E|^2)^{-1}-1)E + \gamma\exp(i\varphi)E(t-1). \tag{17}$$

Для каждого фиксированного целого n и каждой точки $(\delta,(1+\rho^2)^{-1})$, принадлежащей кривой $I(v,\alpha,q,\gamma)$, кроме, возможно, двух при всех достаточно малых $\varepsilon>0$ у уравнения (17) есть решение

$$E = (\rho+\varepsilon w(\varepsilon))\exp[i(\delta/\varepsilon+\theta+\Omega+2\pi n+\varepsilon d(\varepsilon))t]. \tag{18}$$

Была поставлена задача найти такие условия устойчивости (неустойчивости), чтобы для каждого целого n при всех достаточно малых $\varepsilon>0$ решение (18) уравнения (17) было экспоненциально орбитально устойчивым (неустойчивым) в фазовом пространстве $C[-1,0]$.

Для формулировки результатов об устойчивости введем некоторые обозначения. Пусть $(1+\rho_{low}^2)^{-1} = (v-2\gamma)/(vq)$, $\delta_{low} = 1/2v\alpha(q(1+\rho_{low}^2)^{-1}-1)$, $\psi=\varphi-\Omega$,

$$\begin{gathered}H(x) = \gamma^3x^3 - \gamma^2(\gamma+4u\cos\psi+2\gamma\cos^2\psi+2\alpha u\sin\psi)x^2+\gamma(-\gamma^2+2u^2+\\ +4\gamma u\cos\psi+4\gamma^2\cos^2\psi+3u^2\cos^2\psi+4\gamma u\cos^3\psi+4\alpha u^2\cos\psi\sin\psi+\\ +4\alpha\gamma u\cos^2\psi\sin\psi+\alpha^2u^2\sin^2\psi)x+2\alpha\gamma^2u\sin\psi-2u^3\cos\psi-2\gamma^3\cos^2\psi-\\ -5\gamma u^2\cos^2\psi-4\gamma^2u\cos^3\psi+\gamma^3-2\alpha u^3\sin\psi-4\alpha\gamma u^2\cos\psi\sin\psi-\\ \hfill -4\alpha\gamma^2u\cos^2\psi\sin\psi+\alpha^2\gamma u^2\sin^2\psi,\end{gathered}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\cos(\varphi-\Omega)+\alpha\sin(\varphi-\Omega)>0,\\ 1/2vq\rho^2(1+\rho^2)^{-2}+2\gamma\cos(\varphi-\Omega)>0,\\ \dfrac{qv\rho^2}{2(1+\rho^2)^2}-\dfrac{\gamma(1+\alpha^2)\sin^2(\varphi-\Omega)}{\cos(\varphi-\Omega)+\alpha\sin(\varphi-\Omega)}>0,\end{array}\right. \tag{19}$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos(\varphi-\Omega)+\alpha\sin(\varphi-\Omega)<0,\\ 1/2vq\rho^2(1+\rho^2)^{-2}+\gamma\cos(\varphi-\Omega)<0,\\ \dfrac{vq\rho^2}{2(1+\rho^2)^2}-\dfrac{\gamma(1+\alpha^2)\sin^2(\varphi-\Omega)}{\cos(\varphi-\Omega)+\alpha\sin(\varphi-\Omega)}<0.\end{array}\right. \tag{20}$$

Относительно устойчивости автомодельных циклов (18) уравнения (17) получены следующие результаты.

Теорема 16. *Пусть $0<v-2\gamma<qv$. Пусть для некоторой точки $(\delta_0,(1+\rho_0^2)^{-1})$ множества $I(v,\alpha,q,\gamma)$ выполнена система неравенств* (19), *а уравнение $H(x)=0$ не имеет корней ни при каком значении x из $[-1,1]$ для всех точек кратчайшей дуги $I(v,\alpha,q,\gamma)$, соединяющей точки $(\delta_0,(1+\rho_0^2)^{-1})$ и $(\delta_{low},(1+\rho_{low}^2)^{-1})$. Тогда для каждого целого n существует такое $\varepsilon_0>0$, что при всех $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ решение уравнения* (17) *вида* (18) *с $\delta=\delta_0$ и $\rho^2=\rho_0^2$ устойчиво.*

Теорема 17. *Пусть для некоторой точки* $(\delta_0, (1+\rho_0^2)^{-1})$ *множества* $I(v,\alpha,q,\gamma)$ *выполняется совокупность* (20). *Тогда для каждого целого* n *существует такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что при всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *решение* (18) *уравнения* (17) *с* $\delta = \delta_0$ *и* $\rho^2 = \rho_0^2$ *неустойчиво.*

Будем говорить, что точка $(\delta_0, (1+\rho_0^2)^{-1})$ множества $I(v,\alpha,q,\gamma)$ принадлежит области устойчивости, если все решения (18) уравнения (17) с $\rho^2 = \rho_0^2$ и $\delta = \delta_0$ устойчивы при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Теорема 18. *Пусть* $v < 2\gamma$. *Тогда решения, соответствующие любой точке множества* $I(v,0,q,\gamma)$, *являются неустойчивыми. Пусть* $0 < v - 2\gamma < qv$. *Тогда на множестве* $I(v,0,q,\gamma)$ *расположена односвязная область устойчивости и одна или две области неустойчивости. Пусть* $v - 2\gamma > qv$. *Тогда множество* $I(v,0,q,\gamma)$ *пусто.*

В **заключении** формулируются выводы, предлагаются направления для дальнейших исследований.

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

В работе рассматривались важные классы сингулярно возмущенных распределенных систем: уравнения в частных производных с малой диффузией и дифференциальные уравнения с большим запаздыванием. Исследовалась динамика следующих представителей данных классов: уравнения Гинзбурга-Ландау с малой диффузией, моделей Стюарта-Ландау, FDML лазера и Лэнга-Кобаяши с большим запаздыванием. Изучение динамики данных уравнений в полном объеме, то есть поведения различных решений при стремлении времени к бесконечности, — достаточно сложная задача, поэтому была поставлена задача исследовать вопросы существования и устойчивости семейств решений из одного класса, имеющего большое значение, — автомодельных циклов. Для всех моделей были найдены условия существования семейств данного вида, достаточные условия устойчивости и неустойчивости автомодельных решений, и показано, что за счет уменьшения бифуркационного параметра можно добиться сосуществования асимптотически большого числа устойчивых решений.

Список публикаций по теме диссертации

Публикации в перечне ведущих рецензируемых научных журналов, рекомендованных ВАК

1. *Кащенко, А. А.* Устойчивость бегущих волн в уравнении Гинзбурга-Ландау с малой диффузией / *А. А. Кащенко* // Моделирование и анализ информационных систем. — 2011. — Т. 18, №3. — С. 58–62.
2. *Кащенко, А. А.* Устойчивость простейших периодических решений в уравнении Стюарта–Ландау с большим запаздыванием / *А. А. Кащенко*

// Моделирование и анализ информационных систем. — 2012. — Т. 19, №3. — С. 136–141.

3. *Kashchenko, A. A.* Stability of the Simplest Periodic Solutions in the Stuart–Landau Equation with Large Delay / *A. A. Kashchenko* // Automatic Control and Computer Sciences. — 2013. — V. 47, №7. — P. 566–570.
4. *Кащенко, А. А.* Устойчивость непрерывных волн для модели FDML лазера / *А. А. Кащенко* // Моделирование и анализ информационных систем. — 2014. — Т. 21, №3. — С. 35–54.
5. *Kashchenko, A. A.* Stability of continuous wave solutions of one laser model with large delay / *A. A. Kashchenko* // Regular and Chaotic Dynamics. — 2015. — V. 20, №2. — P. 173–183.
6. *Кащенко, А. А.* Устойчивость непрерывных волн для модели полупроводникового лазера с большим запаздыванием / *А. А. Кащенко* // Моделирование и анализ информационных систем. — 2015. — Т. 22, №3. — С. 420–438.

Работы, опубликованные в других журналах

7. *Кащенко, А. А.* Исследование устойчивости бегущих волн уравнения Гинзбурга-Ландау с малой диффузией / *А. А. Кащенко* // СамДифф-2011: конференция «Дифференциальные уравнения и их приложения», г. Самара, 26-30 июня 2011 г. Тезисы докладов. Самара: Издательство «Универс групп», 2011. — С. 59–60.
8. *Кащенко, А. А.* Исследование устойчивости решений вида бегущих волн в уравнении Гинзбурга-Ландау с малой диффузией / *А. А. Кащенко* // Современные проблемы математики и информатики Вып. 12. — Ярославль: ЯрГУ, 2011. — С. 49–55.
9. *Kashchenko, A. A.* Stability of periodic solutions of singular perturbed Stuart–Landau equation / *A. A. Kashchenko* // Foundations and Advances in Nonlinear Science (16-th International Conference-School, September 24-28, 2012, Minsk, Belarus) and Advances in Nonlinear Photonics (International Symposium, September 24-26, 2012, Minsk, Belarus): Programme and Book of abstracts. Minsk: Publ. Centre of BSU, 2012. — pp. 30–31.
10. *Kashchenko, A. A.* Stability of traveling waves in Ginzburg-Landau equation with weak diffusion / *A. A. Kashchenko* // Conference abstracts, International Student Conference "Science and Progress". SPb.: Solo, 2012. — p. 55.
11. *Кащенко, А. А.* Существование и устойчивость автомодельных циклов одной динамической системы, распределенной по времени / *А. А. Кащенко* // Современные проблемы математики и информатики Вып. 13. — Ярославль: ЯрГУ, 2013. — С. 51–68.

12. *Kashchenko, A. A.* Stability of auto-model cycles in a differential equation with large delay / *A. A. Kashchenko* // Международная конференция, посвященная памяти Л.П. Шильникова: Тезисы докладов. Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2013. — С. 61.
13. *Кащенко, А. А.* Исследование устойчивости автомодельных режимов одной модели с большим запаздыванием / *А. А. Кащенко* // Путь в науку. Информационные технологии и математика: Материалы Международной молодежной научно-практической конференции. Ярославль: ЯрГУ, 2013. — С. 74–77.
14. *Kashchenko, A. A.* Stability of CW Solutions of Fourier Domain Mode Locked Laser / *A. A. Kashchenko* // Conference abstracts, International Student Conference “Science and Progress”, SPb.: Solo, 2013. — p. 29.
15. *Кащенко, А. А.* Устойчивость автомодельных решений для одной лазерной системы / *А. А. Кащенко* // Нелинейная динамика и ее приложения: Международная конференция, посвященная 150-летию со дня рождения Поля Пенлеве: Тезисы докладов. Ярославль: ЯрГУ, 2013. — С. 21.
16. *Кащенко, А. А.* Динамика периодических решений для двух моделей с большим запаздыванием / *А. А. Кащенко* // Материалы X Международной школы-конференции «Хаотические автоколебания и образование структур» (ХАОС-2013), 7-12 октября 2013, Саратов. Саратов: ООО «Издательский дом «Наука», 2013. — С. 79.
17. *Кащенко, А. А.* Устойчивость автоколебательных решений для одной лазерной системы / *А. А. Кащенко* // Нелинейные явления в задачах современной математики и физики: Международная конференция, посвященная 210-летию Демидовского университета: Тезисы докладов. Ярославль: ЯрГУ, 2014. — С. 27–28.
18. *Кащенко, А. А.* Существование и устойчивость простейших автомодельных решений для модели с запаздыванием, описывающей FDML лазер / *А. А. Кащенко* // Международный научный семинар "Актуальные проблемы математической физики". (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, Физический факультет, 28-29 ноября 2014). Тезисы докладов. Москва : МГУ, 2014. — С. 106–107.
19. *Кащенко, А. А.* Устойчивость простейших автоколебательных решений для двух моделей с большим запаздыванием / *А. А. Кащенко* // Научная сессия НИЯУ МИФИ-2015. Аннотации докладов. В 3 томах. Т. 2. Наука о жизни (высокотехнологическая медицина). Наноструктурная электроника. Плазменные, лазерные исследования и технологии. Прикладная математика и теоретическая физика. М.: НИЯУ МИФИ, 2015. — С. 237.
20. *Kashchenko, A. A.* Stability of Continuous Wave Solutions of One Laser Model with Delay / *A. A. Kashchenko* // International Workshop

«Nonlinear Photonics: Theory, Materials, Applications» (June 29 – Jule 2, 2015, Saint–Petersburg, Russia): Book of abstracts. SPb.:SPbSU, 2015. — P. 34.

Подписано в печать 07.10.15. Формат 60x84/16.
Тираж 100 экз. Заказ 18/15.
Отдел оперативной полиграфии ЯрГУ
150000, Ярославль, ул. Советская, 14.