На правах рукописи

Поляков Сергей Владимирович

# КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С МАЛЫМИ КРАТНОСТЯМИ В РАЗЛОЖЕНИИ КВАДРАТОВ НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Специальность 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Ярославль — 2014

Диссертационная работа выполнена на кафедре алгебры и математической логики федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова».

**Научный руководитель:**
доктор физико-математических наук, профессор
**Казарин Лев Сергеевич**

**Официальные оппоненты:**

**Ведерников Виктор Александрович**
доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры, геометрии и методики их преподавания института математики и информатики ГБОУ ВПО «Московский городской педагогический университет».

**Чанков Евгений Игоревич**
кандидат физико-математических наук, старший инженер-программист ООО «Конфёрмит»

**Ведущая организация:**

**ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»**

Защита диссертации состоится 20 июня 2014 года в 14-00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.002.03 при Ярославском государственном университете им. П.Г. Демидова по адресу: 150008, г. Ярославль, ул. Союзная, 144, аудитория 426.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова: 150003, г. Ярославль, Полушкина роща, д.1а, а также на сайте Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова:
http://www.rd.uniyar.ac.ru/upload/iblock/36d/d42.pdf

Автореферат разослан «___» апреля 2014 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Яблокова Светлана Ивановна

# Общая характеристика работы

**Постановка задачи и актуальность темы диссертации.**

Изучение особенностей строения конечных групп через заданные свойства неприводимых представлений широко используется в теории групп. Существуют как и очевидные утверждения, так и далеко не тривиальные факты, касающиеся, например, простых групп[1].

Если $\varphi$ и $\psi$ — обыкновенные неприводимые представления группы $G$, то существует разложение

$$\varphi\psi = \sum_{\theta} c^{\theta}_{\varphi\psi}\theta,$$

где $\theta$ — неприводимые попарно неэквивалентные представления группы $G$. Структурные константы $c^{\theta}_{\varphi\psi}$ могут быть определены с помощью характеров представлений $\theta$ из соотношений ортогональности.

Интерес представляют случаи, когда на структурные константы накладываются определенные ограничения. В одном из них количество ненулевых констант $c^{\theta}_{\varphi\psi}$ невелико, в другом — сами константы ограничены сверху.

В первом направлении имеются результаты, касающиеся разрешимых групп, и, в первую очередь, $p$-групп. Достаточно подробно исследован случай, когда характер, полученный как произведение некоторого неприводимого характера на свой сопряженный, имеет в своем разложении малое число различных слагаемых[2, 3].

Во втором направлении нас интересуют следующие случаи. Рассмотрим группы, у которых тензорные произведения любых двух неприводимых представлений имеют в своем разложении малые кратности.

Конечную группу $G$ назовем *$SM_m$-группой*[4], если тензорный квадрат любого ее неприводимого представления разлагается в сумму неприводимых представлений группы $G$ с кратностями, не превосходящими $m$.

В 1941 году лауреат нобелевской премии по физике Юджин Вигнер (Эухенио Вигнер) ввел понятие *SR-группы*.

---

[1] Kazarin L.S. Sagirov I.A. On the degrees of irreducible characters of finite simple groups //Proc. of the Steklov Inst. Math. Suppl., 2001, Vol. 2. p. 71-81.

[2] Adan-Bante E. Squares of characters and finite groups.// J.Algebra. 2007. 310(2). p.619-623.

[3] Adan-Bante E. Products of characters with few irreducible constituents. // J.Algebra. 2007. 311(1). p.38-68.

[4] от английского *«Square multiplicity»*

*Просто приводимыми группами* (или SR-группами[5]) называются вещественные группы, в которых тензорное произведение любых двух неприводимых представлений не имеет кратностей (то есть кратности не выше единицы). Вигнер показал[6], что для произвольной конечной группы $G$ справедливо следующее неравенство

$$\sum_{g \in G} |\sqrt{g}|^3 \leq \sum_{g \in G} |C_G(g)|^2, \qquad (*)$$

где $\sqrt{g} = \{x \in G \mid x^2 = g\}$, а $C_G(g)$ — централизатор элемента $g$. Конечная группа $G$ является просто приводимой тогда и только тогда, когда вышеуказанное неравенство обращается для этой группы в равенство. Получаемое из $(*)$ равенство называется *«условием Вигнера»*. Несмотря на предложенный критерий, в общем случае проверка условия Вигнера для конкретной конечной группы $G$ является трудоемкой задачей, поэтому вопрос о свойствах и строении SR-групп долгое время оставался открытым.

Для неравенства, предложенного Вигнером, существует обобщение. В своей работе[7] Дж. Макки доказал, что для произвольной конечной группы $G$ справедливы неравенства.

$$\sum_{g \in G} |\sqrt{g}|^{n+1} \leq \sum_{g \in G} |C_G(g)|^n,$$

где $n$ — произвольное натуральное число. Там же приведено доказательство неравенства Вигнера для конечных групп ($n = 2$ — это условие Вигнера).

В приложении «Нерешенные задачи» книги Введение в алгебру[8] А.И. Кострикин, в качестве нерешенной проблемы, сформулировал вопрос о SR-группах:

> Как выразить в общем принадлежность к SR-классу в терминах структурных свойств группы?

С.П. Струнковым были сформулированы конкретные проблемы относительно строения SR-группы: «Дать описание всех просто при-

---

[5]от *«Simply reducible»*

[6]Wigner E.P. On representations of certain finite groups// Amer. J. Math., 1941. Vol.63. p.57-63.

[7]Mackey G.W. Symmetric and anti symmetric kroneker squares and interwining numbers of induced representations of finite groups//Amer. J. Math., 1953. Vol.75. N3. p.387-405.

[8]Кострикин А.И. Введение в алгебру, часть 3. Основные структуры алгебры. М.: Физ.-мат. лит., 2001. 272 с.

водимых групп ... (вопрос, интересный для физиков). Не будет ли конечная просто приводимая группа разрешимой[9]?»

Заметим, что в 1984 году, в 9-м издании Коуровской тетради под номером 9.56 был опубликован вопрос Яна Саксла (J. Saxl): «Найти все конечные группы, для которых тензорный квадрат любого обыкновенного неприводимого представления свободен от кратностей[10].»

Впоследствии задача С.П. Стрункова была решена Л.С. Казариным, В.В. Янишевским[11] и Е.И. Чанковым[12]. При этом был рассмотрен новый класс групп, более широкий чем SR. При отказе от вещественности и замены требования на разложимость без кратностей только квадратов неприводимых представлений, получаются группы, названные авторами ASR-группами[13]. ASR-группы, как и содержащиеся в их множестве SR-группы, оказались разрешимы.

Необходимо отметить, что вопрос о разрешимости ставится только для конечных SR-групп. Для бесконечных групп существует контрпример: трехмерная группа вращений $O(3)$ — $SR$-группа[14].

Можно сказать, что ASR-группы являются своеобразной границей. Если хотя бы одна из кратностей больше единицы, то в общем случае говорить о разрешимости группы нельзя.

$\mathrm{SM}_m$-группы являются естественным обобщением SR и ASR групп. Понятно, что множество $\mathrm{SM}_2$-групп также содержит в себе и ASR-группы.

Для удобства введем еще одно определение. Назовем *SM-характеристикой* группы $G$ наибольшую кратность в разложении квадратов неприводимых представлений этой группы. SM-характеристику группы $G$ можно также определить как число $m_\chi(G)$, такое, что $G$ — $\mathrm{SM}_{m_\chi(G)}$, но уже не $\mathrm{SM}_{m_\chi(G)-1}$-группа.

Вероятно, что существует связь между наибольшей кратностью в разложении квадрата неприводимого характера и количеством характеров, входящих в это разложение. Например Edith Adan-Bante доказала, что если $G$ — конечная нильпотентная группа нечетного порядка и $\chi$ — ее неприводимый характер простой нечетной степени

[9]Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. Издание 16-е, дополненное, включающее Архив решенных задач. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2006. С.61, вопрос 11.94.

[10]Там же, С.40, вопрос 9.56.

[11]Казарин Л.С., Янишевский В.В. О конечных просто приводимых группах. // Алгебра и анализ, 2007. Т.19. N6. С.86-116.

[12]Казарин Л.С. Чанков Е.И. Конечные просто приводимые группы разрешимы. // Математический сборник, 2010. Т.201. N5. С.27-40.

[13]от *«Almost simply reducible»*

[14]Хамермеш М. Теория групп и ее применение к физическим проблемам. М.: Мир, 1966. 588 с.

$p$, то наибольшая кратность в разложении характера $\chi^2$ связана с количеством неприводимых слагаемых в его разложении. Более точно, эта кратность равна 2, если слагаемых $(p+1)/2$, и равна $p$ если слагаемое всего одно[15].

Заметим, что достаточно часто встречаются конечные разрешимые группы, у которых SM-характеристика больше единицы.

Если рассматривать группы с кратностями в квадратах неприводимых представлений не больших двух ($\mathrm{SM}_2$-группы), то возникает ряд вопросов, связанных с их строением:

> Какие из простых неабелевых групп являются $\mathrm{SM}_2$-группами?
>
> Какими особенностями строения обладают неразрешимые $\mathrm{SM}_2$-группы?
>
> Какие из разрешимых групп являются $\mathrm{SM}_2$-группами?

$\mathrm{SM}_2$-группы представляют особенный интерес, поскольку являются в каком-то смысле минимальным «расширением» класса ASR-групп.

В общем случае возникает вопрос о связи между SM-характеристикой конечной группы и ее строением.

**Цель и методы работы.**

Целью работы является исследование строения конечных групп, у которых тензорный квадрат любого неприводимого представления содержит неприводимые представления с небольшими кратностями, в частности, не больше двух. В диссертации используются методы доказательств теории конечных групп и теории характеров, в частности теорема Классификации простых конечных групп. В некоторых случаях для дополнительных вычислений была использована система компьютерной алгебры GAP.

**Научная новизна.**

Все основные результаты диссертации являются новыми. Главные из них:

1. Получено описание строения неабелевых композиционных факторов конечных неразрешимых $\mathrm{SM}_2$-групп.

2. Получено описание строения всех конечных почти простых $\mathrm{SM}_2$-групп.

[15] Adan-Bante E. Squares of characters and finite groups. Теорема C.

3. Для всех конечных простых и почти простых групп получены нижние оценки SM-характеристики.

4. Вычислены SM-характеристики для некоторых конечных почти простых групп (в частности, для всех спорадических простых групп).

5. Получены нижние оценки SM-характеристики для групп Фробениуса, вычислены SM-характеристики некоторых 2-групп.

**Положения, выносимые на защиту**

1. Доказано, что среди всех конечных почти простых групп SM$_2$-группами являются только группы $PGL_2(q)$ и знакопеременная группа $A_5$.

2. Доказано, что неабелевыми композиционными факторами конечных неразрешимых SM$_2$-групп могут быть только группы, изоморфные группе $L_2(q)$.

**Теоретическая и практическая значимость.**

Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в исследованиях по теории конечных групп и их представлениям, в алгебраической комбинаторике, а также в интерпретации некоторых задач теоретической физики.

**Апробация работы.**

Результаты диссертации докладывались на научно-практической конференции «Ярославский край. Наше общество в третьем тысячелетии» (Ярославль, 2010), на конференции «Алгоритмические вопросы теории групп и смежных областей», Новосибирск (2010), на 64-й научной студенческой конференции (Ярославль, 2011), на международной (43-й Всероссийской) молодежной школе-конференции «Современные проблемы математики» (Екатеринбург, 2012), на XI Белорусской математической конференции (Минск, 2012), а также на научных семинарах «Избранные вопросы теории групп» кафедры алгебры и математической логики ЯрГУ им. П.Г. Демидова (Ярославль, 2011-2013).

**Публикация результатов.**

Материал диссертации был опубликован в цикле работ, состоящем из 4 статей (в том числе 2 статьи в журнале из списка рекомендованных ВАК РФ), и 4 тезисов докладов. Все 4 статьи написаны без соавторов. Список работ приведен в конце автореферата.

**Структура и объем работы.**

Диссертация состоит из оглавления, введения, шести глав (22 параграфов), заключения, списка литературы из 41 наименования и приложений. Текст диссертации изложен на 102 страницах.

## Содержание диссертации

**Общая структура диссертации.**

**Введение**

Во введении обосновывается актуальность проблемы, делается постановка задачи, приводится краткий обзор уже известных результатов. Далее следует содержание диссертации, а также обзор полученных в ней результатов.

**Глава 1. Предварительные сведения**

Данная глава носит вспомогательный характер. В ней формулируются основные определения и результаты, используемые в диссертации.

В параграфе 1.1 изложены сведения теоретико-группового характера. Даны определения полупрямого произведения, нормального и композиционного ряда, почти простой группы, цоколя группы.

В параграфе 1.2 приводятся сведения из теории представлений и теории характеров. Вводится понятие индуцированного характера, характера Стейнберга простой неабелевой группы лиева типа, закон взаимности Фробениуса. Приводятся основные формулировки теории Клиффорда, сведения о характерах знакопеременной группы $A_n$, в частности, «формула крюков», указаны наибольшие значения степени неприводимого характера знакопеременной группы $A_n$ при $5 \leqslant n \leqslant 12$.

Далее в параграфе приводятся таблицы характеров группы $L_2(q)$ для четных $q$, и $PGL_2(q)$, а также значения двух характеров группы $L_2(q)$ для нечетных $q$. В конце параграфа даны таблицы значений двух специальных характеров групп $L_3(q)$ и $U_3(q)$ и доказываются леммы о кратности вхождения одного характера в разложение квадрата другого.

В параграфе 1.3 излагаются сведения о простых неабелевых группах: оценки классового числа, порядки групп внешних автоморфизмов, степени характера Стейнберга групп лиева типа. Для групп $L_n(q)$, $U_n(q)$, $B_n(q)$, $C_n(q)$ при небольших $n$ и $q$ вычислены точные значения классового числа. В конце параграфа приведены сведения о спорадических группах, а именно: значения классового числа, порядков самих групп и групп их внешних автоморфизмов.

В параграфе 1.4 приводится неравенство Галлахера, дающее верхнюю и нижнюю оценку для классового числа группы через индекс и классовое число ее подгруппы. Кроме того, дается оценка числа неприводимых характеров нормальной подгруппы конечной группы через классовое число этой группы. Также приведены оценки классового числа группы $S_n$ и ее подгрупп.

Параграф 1.5 посвящен выводу основных свойств $\mathrm{SM}_m$-групп. Доказываются неравенства, связывающие порядок $\mathrm{SM}_m$-группы $G$, ее классовое число $k(G)$ и степень неприводимого представления:

**Лемма 1.5.2.** *Пусть $G$ — конечная $SM_m$-группа. Тогда, для любого неприводимого характера $\chi$ группы $G$, $\chi(1) \leqslant mk(G)$.*

**Лемма 1.5.3.** *Пусть $G$ — конечная $SM_m$-группа. Тогда $|G| \leqslant \leqslant m^2k(G)^3$.*

**Лемма 1.5.4.** *Пусть $G$ — конечная $SM_m$-группа. Тогда для любого ее неприводимого характера $\chi$ выполняется: $\chi^2(1) \leqslant m\sqrt{|G|k(G)}$.*

**Лемма 1.5.5.** *Пусть $G$ — неразрешимая $SM_m$-группа. Тогда степень любого ее неприводимого характера $\chi$ удовлетворяет неравенству $\chi(1) \leqslant mk(G) - m$.*

Первые три свойства выводятся из определения. Для доказательства четвертого свойства используется факт, что количество степеней неприводимых характеров неразрешимой группы не меньше 3 (предложение 1.2.6).

Кроме того, указывается критерий, по которому удалось получить нижние оценки $m(G)$ для SM-характеристики $m_\chi(G)$. С помощью этого критерия отсеивались группы, заведомо не попадающие в класс $\mathrm{SM}_2$-групп.

В параграфе 1.6 приведен список простых и почти простых групп, для которых удалось определить их SM-характеристику. Отдельно даны результаты для спорадических групп и их групп автоморфизмов.

**Глава 2. Кратности в разложении квадратов неприводимых представлений почти простых групп с цоколем, изоморфным $L_2(q)$**

В этой главе исследуются почти простые группы с цоколем, изоморфным группе $L_2(q)$, для которых определяется SM-характеристика.

В начале главы в параграфе 2.1 доказываются вспомогательные утверждения, касающиеся сумм примитивных корней из единицы в поле комплексных чисел.

В параграфе 2.2 рассматриваются группы $L_2(q)$. С помощью вычислений по таблице характеров доказывается при четном $q$, что для любых двух неприводимых характеров кратность вхождения одного в разложения квадрата другого не превосходит 2. Другими словами, доказывается, что для четного $q$, $L_2(q)$ — $\mathrm{SM}_2$-группа и ее SM-характеристика равна двум.

Для нечетного $q \geqslant 3$ выбирается пара подходящих характеров, с помощью которых показывается, что в этом случае SM-характеристика равна трем (кроме случаев $q = 3$ и 5). Здесь не проводилась полная проверка для всех пар неприводимых характеров, но, как показывают вычисления для групп $L_2(q)$ при $5 < q < 125$, именно это значение и будет наибольшим. Таким образом, можно предполагать, SM-характеристика группы $L_2(q)$ в случае нечетного $q$ будет равна трем.

В параграфе 2.3 доказывается, что группы $PGL_2(q)$, $q > 3$ являются $\mathrm{SM}_2$-группами.

Следует отметить, что в начале исследования среди простых неабелевых групп была известна только одна $\mathrm{SM}_2$-группа — $A_5$. Поскольку существует изоморфизм групп $A_5 \cong L_2(4) \cong L_2(5)$, то появление групп $L_2(q)$, по крайней мере, для четных $q$, в списке $\mathrm{SM}_2$-групп было вполне логично. Неожиданным оказалось то, что класс простых $\mathrm{SM}_2$-групп содержал только эти группы (исключение $q = 5$). Как оказалось впоследствии, и эти группы — частный случай групп $PGL_2(q)$ ввиду изоморфизма $L_2(q) \cong PGL_2(q)$ для четных $q$.

Наконец, в параграфе 2.4 разбираются случаи, когда $G$ — почти простая группа с цоколем, изоморфным $L_2(q)$, отличная от $L_2(q)$ и $PGL_2(q)$. В каждом из них доказано, что SM-характеристика $m_\chi(G)$ группы $G$ больше двух. Итог главы — теорема:

**Теорема 2.4.4.** *Пусть $G$ конечная почти простая $\mathrm{SM}_2$-группа с цоколем, изоморфным $L_2(q)$. Тогда $G$ изоморфна $A_5$ или $PGL_2(q)$.*

## Глава 3. Простые $\mathrm{SM}_2$-группы

При изучении конечных групп, у которых квадраты неприводимых представлений имеют небольшие кратности, первым возник вопрос, какие из простых неабелевых групп будут $\mathrm{SM}_2$-группами. Выбор $\mathrm{SM}_2$-групп объясняется тем, что ASR-группы ($\mathrm{SM}_1$-группы) уже достаточно хорошо изучены[16, 17].

[16]Казарин Л.С., Янишевский В.В. О конечных просто приводимых группах.

[17]Казарин Л.С. Чанков Е.И. Конечные просто приводимые группы разрешимы.

В общем случае вопрос можно сформулировать так: для указанного $m$ определить, какие из простых неабелевых групп входят в класс $\mathrm{SM}_m$-групп, в частности перечислить группы, у которых SM-характеристика в точности равна $m$.

Для получения необходимой информации о конечных $\mathrm{SM}_m$-группах использовались леммы 1.5.2 и 1.5.5. Для каждой простой неабелевой группы $L$ было рассмотрено число $m(L)$, равное отношению степени некоторого ее неприводимого характера $\chi$ к числу классов сопряженных элементов $k(L)$. В силу леммы 1.5.5, если $L$ — неразрешимая $\mathrm{SM}_m$-группа, то $\chi(1) < m(k(L)-1)$ для любого неприводимого характера $\chi$ группы $L$. Поэтому, если для группы $L$ значение $m(L)$ больше некоторого числа $r$, то и ее SM-характеристика $m_\chi(L)$ больше $r$. Другими словами, $L$ не является $\mathrm{SM}_r$-группой.

Неоднозначность определения $m(L)$ объясняется тем, что не всегда известна наибольшая из степеней неприводимых характеров. С другой стороны, здесь важнее были оценки значений $m(L)$ снизу. В качестве подходящего характера, как правило, использовался характер Стейнберга, но в ряде случаев, для уточнения полученного числа, были использованы другие неприводимые характеры большей степени.

В конце главы подводится итог исследований для простых групп:

**Теорема 3.4.2.** *Пусть $L$—конечная простая набелева $SM_2$-группа. Тогда $L$ изоморфна группе $L_2(q)$, где $q = 2^t \geqslant 4$.*

**Глава 4. Почти простые $\mathrm{SM}_2$-группы**

Как и в предыдущей главе, здесь была использована лемма 1.5.5. Для каждой из почти простых групп $G$ с цоколем $L$ рассматривалось число $m(G) = \psi_0(1)/k(G)$, где $\psi_0$ — неприводимый характер группы $G$, имеющий наибольшую степень. С учетом результатов главы 3, окончательную оценку снизу для $m(G)$ можно записать так:

$$m(G) \geqslant \frac{m(L)}{k(\mathrm{Out}(L))} \geqslant \frac{m(L)}{|\mathrm{Out}(L)|}.$$

В том случае, когда эта оценка неэффективна, используется дополнительная информация о группе $G$, а также лемма 1.5.4.

Оказалось, что если $L \neq L_2(q)$, то в этом случае SM-характеристика $m_\chi(G) > 2$ поэтому $G$ не будет являться $\mathrm{SM}_2$-группой. Окончательный результат этой главы обобщает теорему 2.4.4:

**Теорема 4.4.2.** *Пусть $G$ — конечная почти простая $SM_2$-группа. Тогда $G$ изоморфна $A_5$ или $PGL_2(q)$.*

**Глава 5. Неразрешимые $\mathrm{SM}_2$-группы**

Для неразрешимых $\mathrm{SM}_2$-групп небольшого порядка удалось установить, что все их неабелевы композиционные факторы изоморфны группе $L_2(q)$. Цель исследований главы 5 — выяснить, верно ли это и для остальных конечных неразрешимых $\mathrm{SM}_2$-групп.

Дальнейшие рассуждения строились в предположении, что существуют неразрешимые $\mathrm{SM}_2$-группы с неабелевыми композиционными факторами, отличными от $L_2(q)$. Среди всех таких групп была выбрана группа $G$ наименьшего порядка — минимальный контрпример.

В четырех последующих утверждениях в качестве $\mathrm{SM}_2$-группы $G$ рассматривается этот контрпример. В начале главы доказывается

**Лемма 5.0.3.** *Пусть $N$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G$. Тогда:*

1. *$N$ — единственная минимальная нормальная подгруппа $G$, то есть $N$ — цоколь группы $G$.*
2. *$N \cong L_1 \times \cdots \times L_m$ — характеристически простая группа; все $L_i$ изоморфны простой неабелевой группе $L$.*
3. *$G$ изоморфна подгруппе сплетения $\mathrm{Aut}(L) \wr S$, где $S$ — подгруппа симметрической группы $S_m$, действующая транзитивно на множестве минимальных нормальных подгрупп группы $N$.*

Далее с учетом этих структурных особенностей группы $G$ и в этих обозначениях доказывается:

**Лемма 5.0.4.** *Пусть $\chi_0$ — неприводимый характер группы $G$ наибольшей степени. Тогда*

$$\chi_0(1) < c \cdot |\mathrm{Out}(L)| \cdot k(L),$$

*где $c = (2 \cdot k(S))^{1/m}$, а $k(S)$ — классовое число группы $S$.*

*Если $m > 2$, то $c \leqslant 1,82$ и $c = 2$, если $m = 2$.*

В следующих двух утверждениях, мы ограничиваем список рассматриваемых групп до конкретных случаев.

**Теорема 5.0.5.** *Пусть $m \leqslant 2$. Тогда группа $L$ изоморфна одной из следующих групп: $A_7$, $L_3(3)$, $L_3(4)$, $L_3(8)$, $U_3(3)$, $U_3(4)$, $U_3(5)$, $U_3(8)$, $U_3(16)$.*

**Следствие 5.0.6.** *Пустт $m \geqslant 3$. Тогда $L$ — одна из следующих групп: $L_3(3)$, $L_3(4)$, $L_3(8)$, $U_3(3)$, $U_3(4)$, $U_3(5)$, $U_3(8)$.*

В конце главы, после дополнительной проверки для оставшихся групп, показывается, что $L$ не может быть ни одной из перечисленных групп. Таким образом, доказывается:

**Теорема 5.0.7.** *Пусть $G$ — неразрешимая $SM_2$-группа. Тогда ее простые неабелевы композиционные факторы изоморфны группе $L_2(q)$.*

**Глава 6. Некоторые классы конечных SM$_m$-групп**

Глава 6 посвящена SM$_2$-группам в некоторых частных случаях.

В параграфе 6.1 разбирается случай, когда $G \cong M \rtimes H$ — группа Фробениуса с ядром $M$. Доказано, что SM-характеристика $m_\chi(G)$ группы $G$ не меньше, чем $\dfrac{|H|^2 - |H|}{|M| - 1}$. В качестве примера приводится список некоторых метациклических групп Фробениуса, для которых вычислена SM-характеристика.

Далее в главе 6 рассматриваются разрешимые группы. В параграфах 6.2-6.4 приведены результаты вычислений SM-характеристики $m_\chi(G)$ для 2-групп. Сначала даются сведения о количестве SM$_2$ и SM$_4$-групп среди неабелевых, в частности метабелевых 2-групп порядков, не превосходящих 256. Далее, для некоторых случаев указывается строение, классовое число, SM-характеристика $m_\chi(G)$ и идентификатор группы в системе GAP. Показано, что $m_\chi(G)$ может принимать значения, равные только 1, 2 и 4.

В отдельной таблице приводятся сведения о ступенях разрешимости 2-групп с характеристикой $m_\chi(G) \geqslant 2$. Установлено, что все группы порядков 32 и 64 — SM$_2$-группы, причем группы, у которых $m_\chi(G) = 2$, имеют ступень разрешимости не меньше двух. Для групп порядков 128 и 256 ситуация несколько сложнее. Значения ступеней разрешимости для групп с SM-характеристикой большей единицы равны только 2 или 3.

Параграф 6.5 содержит сведения о количестве всех SM$_m$-групп среди разрешимых неабелевых групп порядков 6–400 (за исключением 2-групп).

**Заключение**

Заключение содержит гипотезы, формулировки которых обобщают полученные в диссертации результаты. Эти гипотезы могут служить ориентирами для дальнейших исследований по SM$_m$-группам.

Далее следует список литературы из 41 наименования.

**Приложения**

В приложениях описываются команды GAP, использованные в работе. Приводятся тексты программ.

# Заключение

В качестве заключения стоит добавить, что хотя структура неразрешимых $\mathrm{SM}_2$-групп описывется достаточно четко, остается ряд вопросов, которые могут представлять интерес.

**Вопрос 1.** Было установлено, что неабелевы композиционные факторы неразрешимой $\mathrm{SM}_2$-группы изоморфны группе $L_2(q)$. Тем не менее, неизестно количество таких факторов. Для групп небольших порядков оказалось, что такой фактор всего один. Вопрос, какое количество будет в общем случае?

**Вопрос 2.** Экспериментально было установлено, что SM-характеристика конечных $p$-групп небольших порядков равна $p^t$, $t \geqslant 0$. Верно ли это в общем случае?

**Вопрос 3.** Какие из 2-групп являются $\mathrm{SM}_2$-группами? Есть основания полагать, что SM-характеристика связана со ступенью разрешимости этих групп.

## Публикации автора по теме диссертации

### Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК Минобрнауки России:


[1] Поляков, С.В. О тензорных квадратах неприводимых представлений конечных почти простых групп. I. / С.В.Поляков // Моделирование и анализ информационных систем. – 2011. – Т.18, – N1 – С.130-141.

[2] Поляков, С.В. О тензорных квадратах неприводимых представлений конечных почти простых групп. II. / С.В.Поляков // Моделирование и анализ информационных систем. – 2011. – Т.18, – N2 – С.5-17.


### Другие публикации:


[3] Поляков, С.В. О тензорных квадратах неприводимых представлений почти простых групп с цоколем, изоморфным $L_2(q)$. / С.В.Поляков // Вестник Пермского университета. – 2011. Вып. 1(5). – С.4-10.

[4] Поляков С.В. О неразрешимых $SM_2$-группах. / С.В.Поляков // Современные проблемы математики и информатики: Сборник научных трудов молодых ученых, аспирантов и студентов. ЯрГУ им. П.Г.Демидова. – Ярославль, 2010. – Вып. 11. – С.14-23.

[5] Поляков, С.В. О тензорных квадратах неприводимых представлений почти простых групп. / С.В. Поляков // Тезисы школы-конференции «Алгоритмические вопросы теории групп и смежных областей», – Новосибирск, 2010. Режим доступа: http://math.nsc.ru/conference/isc/2010/thesis/Polyakov.pdf

[6] Поляков, С.В. О тензорных квадратах неприводимых представлений конечных простых групп / С.В.Поляков // «Ярославский край. Наше общество в третьем тысячелетии» сборник тезисов областной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых вузов Ярославской области, – Ярославль, 2010. – С.84-85.

[7] Поляков, С.В. О структуре неразрешимых $\mathrm{SM}_2$-групп. / С.В.Поляков // Тезисы международной (43-й Всероссийской) молодежной школы-конференции «Современные проблемы математики». – Екатеринбург, 2012. – С.79-81. Режим доступа: http://conf.uran.ru/kungurka/School-2012.pdf

[8] Поляков, С.В. Особенности строения конечных групп с небольшими кратностями в разложении квадратов неприводимых представлений. / С.В.Поляков // XI Белорусская математическая конференция: Тез. докл. Междунар. науч. конф. Минск, 5-9 ноября 2012 г. Часть 5 / Институт математики НАН Беларуси, Белорусский государственный университет. – Минск, 2012, – С.44. Режим доступа:
http://elib.bsu.by/handle/123456789/28854

Подписано в печать 17.04.14. Формат 60x84/16.
Тираж 100 экз. Заказ 6/14.
Отдел оперативной полиграфии ЯрГУ
150000, Ярославль, ул. Советская, 14.