

На правах рукописи

Снятков Алексей Сергеевич

**Разрешимость теорий иерархий
согласованных со сложением функций**

Специальность 01.01.06 — математическая логика, алгебра
и теория чисел

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Ярославль — 2012

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Тверской государственной университет».

Научный руководитель — доктор физико-математических наук,
доцент Дудаков Сергей Михайлович

Официальные оппоненты : Соколов Валерий Анатольевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической информатики Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова

Чагров Александр Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа и геометрии Тверского государственного университета

Ведущая организация — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Защита состоится 23 ноября 2012 г. в 14⁰⁰ часов на заседании диссертационного совета Д 212.002.03 при Ярославском государственном университете им. П. Г. Демидова по адресу: Российская Федерация, 150008, Ярославль, ул. Союзная, 144, ауд. 426.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова.

Автореферат разослан «___» октября 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Яблокова
Светлана Ивановна

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Исследование разрешимости арифметических теорий — одна из центральных задач математической логики. Этим вопросом стали заниматься примерно с середины двадцатых годов 20 века. В начале и середине тридцатых годов были получены знаменитые теоремы Гёделя о неполноте и результат Чёрча о неразрешимости. Эти результаты открыли перспективу изучения разрешимости и индуцировали массу исследований о разрешимости и неразрешимости различных математических теорий.

Одно из направлений исследований — поиск разрешимых обогащений арифметики Пресбургера. Один из наиболее значительных результатов был получен А.Л.Семеновым. Он рассматривал расширение арифметики Пресбургера редкими предикатами¹ и функциями, согласованных со сложением², которые были введены также им. А.Л. Семёнов доказал, что оба варианта обогащения являются разрешимыми. Дудаковым С.М.³ было рассмотрено одновременное обогащение арифметики Пресбургера одностным функциональным и одностным предикатным символами, и показано, что такая теория допускает элиминацию кванторов. Из других результатов, связанных с функцией экспоненты, можно выделить следующий: если гипотеза Шануэля для действительных чисел верна, то теория поля действительных чисел с экспонентой является разрешимой⁴.

Исторически первым и до сих пор являющимся основным методом доказательства разрешимости является метод эффективной элиминации кванторов, это алгоритмический процесс, порождающий по заданной логической формуле другую, эквивалентную ей формулу, свободную от вхо-

¹Семёнов А.Л. О некоторых расширениях арифметики сложения натуральных чисел. // Изв. АН СССР, 43(5), 1979. С.1175–1195.

²Семёнов А.Л. Логические теории одностных функций на натуральном ряде. // Изв. АН СССР, 47(3), 1983. С.623–658.

³Дудаков С.М. Трансляционная теорема и автоматные структуры. // Вестник ТвГУ сер. Прикл. матем., 4(21), 2006. С. 5–35.

⁴Macintyre A.J., Wilkie A.J. On the decidability of the real exponential field, Kreisel 70th Birthday Volume, 2005

ждений кванторов. Элиминация кванторов далеко не всегда возможна, но когда это так, алгоритм элиминации кванторов приносит исключительную пользу для исследователя, так как вскрывает структуру теории и её моделей. При использовании метода элиминация кванторов, часто требуется расширение сигнатуры, что показывает выразительную силу таких теорий.

Арифметическими теориями, разрешимость которых была доказана при помощи элиминации кванторов, являются аддитивная арифметика целых чисел (арифметика Пресбургера) и теория вещественно замкнутых полей (действительных чисел со сложением и умножением).

Примерно с шестидесятых годов 20 века начались исследования вычислительной сложности проблем разрешимости теорий. На сложность разрешения можно смотреть как на меру выразительных возможностей теории. В настоящее время вопрос об эффективности алгоритмов также приобретает всё большее практическое значение в связи с расширением применения вычислительной техники. Для решения задач с помощью вычислительной техники необходимо, чтобы они были алгоритмически разрешимыми и допускали разрешение с использованием ограниченного числа ресурсов, поэтому важной теоретической и практической проблемой является установление вычислительной сложности задач, разрешимость которых известна.

При изучении сложности алгоритма нужно остановиться на каком-нибудь определённом уточнении понятия алгоритма. В качестве разрешающих процедур обычно выбирают алгоритмы, представленные в виде машины Тьюринга, так как сложность разрешающих процедур на машинах Тьюринга отличается от других моделей алгоритма не более чем на полином. Фишер и Рабин⁵ нашли достаточные условия для доказательства трудности задач разрешения теорий в различных классах сложности. В частности, ими показано, что разрешающая процедура для арифметики

⁵Fischer, M. J., and Rabin M.O., Super-Exponential Complexity of Presburger Arithmetic.// Proceedings of the SIAM-AMS Symposium in Applied Mathematics Vol. 7, 1974, 27–41

Пресбургера обладает сложностью по меньшей мере 2^{2^n} . Там же установлено, что разрешающая процедура для теории вещественно замкнутых полей обладает сложностью по меньшей мере 2^n . Однако, эту оценку точной назвать пока нельзя: Оппенен⁶ показал, что для арифметики Пресбургера существует разрешающий алгоритм, который работает $2^{2^{2^n}}$ шагов и вопрос о том какая оценка точнее пока открыт.

Цели работы. Данная работа посвящена исследованию свойств теорий вида:

$$T_f = \text{Th}(\omega, 0, 1, <, +, f_0, f_1, \dots, f_n),$$

образованных из арифметики А.Л.Семенова $\text{Th}(\omega, +, f_0)$ добавлением функций $f_i, i > 0$, которые в работе названы «гиперфункциями». Каждая из них получается итерацией предыдущей. В частности, показано, что такие теории при определённых условиях являются разрешимыми. Также в работе изучается сложность разрешающей процедуры для таких теорий.

Основные положения, выносимые на защиту, и научная новизна. Все полученные результаты являются новыми. На защиту выносятся следующие основные результаты:

1. Доказано, что если все функции являются периодичными по любому натуральному модулю, то любая формула в теориях T_f эквивалентна экзистенциальной. Следовательно, эти теории являются модельно полными. Показано, что преобразование каждой формулы к экзистенциальной может быть эффективным, если все гиперфункции являются эффективно периодичными по любому натуральному модулю. Установлено, что если обогатить теорию обратными для f_i функциями, то получается теория с элиминацией кванторов. Элиминация будет эффективной при упомянутом выше условии. Таким образом, при выполнении условия эффективной периодичности гиперфункций, теории являются разрешимыми.

⁶Derek C. Oppen: A $2^{2^{2^n}}$ Upper Bound on the Complexity of Presburger Arithmetic. J. Comput. Syst. Sci. 16(3): 323-332, 1978

2. Установлено, что если функция f_0 — периодичная по любому модулю $p > 1$ с периодом меньше p , то гиперфункция от f_0 является эффективно периодичной по любому модулю $p > 1$ с периодом 1. Также установлено, что если функция f_0 — периодичная по любому модулю $p > 1$ с периодом меньше p , а функция $f_1(x)$ — периодичная функция, то гиперфункция от функции $f(x) + f_1(x)$ является периодичной по модулю p для любого $p > 1$. Следовательно, теории, для которых выполняется одно из двух условий, являются разрешимыми.
3. Показано, что представленный в работе разрешающий алгоритм для любой формулы длины n для определения её истинности в T_f требует памяти не больше чем $\underbrace{2^{2^{\dots 2^n}}}_{O(n) \text{ раз}}$. Следовательно, разрешающий алгоритм работает не более $\underbrace{2^{2^{\dots 2^n}}}_{O(n) \text{ раз}}$ шагов.
4. Предложен метод кодирования последовательности с помощью бинарного дерева. Используя этот метод, доказано, что для любого разрешающего алгоритма существует формула длины n , для которой время работы алгоритма, определяющего истинность формулы в T_f , будет не меньше чем $\underbrace{2^{2^{\dots 2^2}}}_{O(n) \text{ раз}}$. Таким образом, задача разрешения указанных теорий является полной в классе сложности $\text{TIME}\left(\underbrace{2^{2^{\dots 2^2}}}_{O(n) \text{ раз}}\right)$.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. В ней используются методы математической логики, теории алгоритмов и теории сложности.

Апробация работы. Начиная с 2006 года содержание глав данной диссертации неоднократно докладывалось на семинаре «Теоретические основы информатики» в ТвГУ.

Доклад по теме диссертации был сделан в 2008 году в Санкт-Петербургском отделении Математического института им.В.А.Стеклова РАН на семинаре по математической логике под руководством академика РАН Ю.В.Матиясевича.

Также доклад по теме диссертации был сделан в 2011 году на международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (Воронеж).

Исследования по теме работы были поддержаны РФФИ, проект № 08-01-00241-а.

Публикации. Список публикаций по теме диссертации включает 5 работ. Работы [1], [2], [3] опубликованы в изданиях, входящих в список рекомендованных ВАК ведущих рецензируемых изданий.

Личный вклад автора. Результаты диссертации получены лично автором. Результаты других авторов, упомянутые в тексте диссертации, отмечены соответствующими ссылками.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из титульного листа, оглавления, четырёх глав основной части, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 83 страницы. Библиография включает 46 наименований.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность темы диссертационной работы, освещена история рассматриваемых вопросов, научная новизна результатов исследований и показана их теоретическая значимость, а также кратко перечисляются выносимые на защиту научные положения.

В первой главе даются основные определения, которые используются в диссертации. **В параграфе 1.1** приводятся определения согласованной со сложением функции и иерархии таких функций (см. ссылку¹). Функция f является *эффективно периодичной*, если для любого натурального p функция f периодична по модулю p с периодом, который определяется эффективно по p . Если для функции f выполняются следующие условия:

- (1) f периодична по модулю n для всех $n \in \omega$, $n \geq 2$;

(2) для всякой неограниченной конечной суммы

$$S(x) = \sum_i \alpha_i f(x + \beta_i)$$

существует такое $\delta \in \omega$, что либо $S(x + \delta) > f(x)$ для всех $x \in \omega$, либо $S(x + \delta) < -f(x)$ для всех $x \in \omega$;

(3) f монотонно возрастает,

то она называется *согласованной со сложением*. Если константы в пунктах (1) и (2) находятся эффективно, то f называется *эффективно согласованной со сложением*.

Последовательности функций f_i , где $i \in \omega$ называется *иерархией функций* f_i , если f_i является гиперфункцией от f_{i-1} , то есть определяется так, что $f_{i+1}(x + 1) = f_i(f_{i+1}(x))$.

В параграфе 1.2 приводятся основные определения, связанные с вычислительной сложностью. В работе рассматривается класс сложности $\text{TIME}\left(\underbrace{2^{2^{\dots 2}}}_{O(n) \text{ раз}}\right)$. В этот класс входят задачи, для которых найдется алгоритм, решающий задачу за время не больше $\underbrace{2^{2^{\dots 2}}}_{O(n) \text{ раз}}$ шагов, где n — длина входных данных. В данном случае несущественно, какой алгоритм мы будем использовать: детерминированный или недетерминированный, так как время работы недетерминированного и эквивалентного детерминированного алгоритма отличается не больше чем на экспоненту.

Во второй главе устанавливаются основные свойства иерархии функций, согласованных со сложением. **В параграфе 2.1** доказываются леммы 1–6, в которых показывается, что любая функция из иерархии либо строго возрастает, либо является константой, начиная с некоторого аргумента. Также доказывается, что любая функция из иерархии растет не медленнее, чем предыдущая.

В параграфе 2.2 определяются термы, которые будут в дальнейшем использоваться:

$$t_{ji}(v, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_j) = f_i(f_{i+1}(\dots (f_{j-1}(f_j(v + \mathbf{a}_j) + \mathbf{a}_{j-1}) \dots) + \mathbf{a}_{i+1}) + \mathbf{a}_i),$$

где $i \leq j$, все \mathbf{a}_k — константы. Затем доказываются для них ряд важных в дальнейшем свойств (леммы 7–10).

В третьей главе исследуются свойства теории T_f . **В параграфе 3.1** доказывается следующая основная теорема:

Теорема 1. *Если f_0 согласована со сложением и все f_i периодичны по модулю p для любого натурального p , то в теории T_f любая формула эквивалентна экзистенциальной формуле, матрица которой является булевой комбинацией предикатов делимости и сравнений сумм вида*

$$\mathfrak{d} + \sum_v (\mathbf{b}_{0v} \times t_{00}(v, \mathbf{a}_0) + \dots + \mathbf{b}_{iv} \times t_{i0}(v, \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i) + \mathbf{c}_v v)$$

где все $\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_i, \mathbf{c}, \mathfrak{d}$ — константы, v — переменные из формулы.

Для доказательства теоремы демонстрируется, что формула вида

$$\neg(\exists x_1, \dots, x_l)\phi$$

эквивалентна экзистенциальной, если ϕ — бескванторная формула, причем при этом преобразовании, матрица формулы не теряет нужного нам вида. Для этого модифицируется метод А.Л. Семёнова. Отмечается, что $Q_j(t_{i0}(u, \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i)) + \mathbf{a}$ эквивалентна булевой комбинации формул вида $Q_k(u + \mathbf{b})$ для некоторых k и \mathbf{b} и некоторых линейных неравенств для u . В лемме 11 доказывается, почему можно ограничиться рассмотрением термов вида $\mathbf{b}t_{i0}(v, \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i)$ и $\mathbf{c}v$. Далее каждое неравенство из ϕ приводится к виду

$$r_k \leq s_k \leq w_k,$$

где суммы s_k содержат только слагаемые с переменными x_i , а суммы r_k и w_k таких слагаемых не содержат. Далее термы по каждой переменной группируются в суммы, вида

$$S(x) = \sum_q \alpha_q f(x + \beta_q).$$

Среди всех таких сумм выбирается σ — максимальная по величине. Пусть s'_k — остаток суммы s_k (без σ). Возможны две ситуации:

1. σ по модулю превосходит каждое s'_k не менее чем в два раза,
2. σ по модулю меньше $2s'_k$ для некоторого k .

Используя леммы 1–10, показывается, что в первом случае количество элиминируемых кванторов можно уменьшить, добавляя новые кванторы существования перед отрицанием, а во втором — сократить их количество, используя вместо кванторов дизъюнкцию.

Из доказательства теоремы 1 следует, что преобразование каждой формулы к экзистенциальной может быть эффективным при условии, что все гиперфункции являются эффективно периодичными по любому натуральному модулю.

В предыдущей теореме было установлено, что в теории T_f любая формула эквивалентна экзистенциальной формуле. Также известно, что если в теории любая формула эквивалентна экзистенциальной формуле, то она является модельно полной.

Следствие 1. *Если функция f_0 согласована со сложением и все функции f_i периодичны по модулю p для любого $p > 1$, то теория T_f является модельно полной.*

В параграфе 3.2 показывается, что если обогатить теорию обратными для f_i функциями, то получается теория с элиминацией кванторов, которая также может быть эффективной при условии эффективной периодичности гиперфункций.

Теорема 2. *Пусть f_0 — согласованная со сложением функция и все функции f_i периодичны по модулю p для любого натурального p . Тогда если теорию T_f обогатить предикатами делимости и обратными функциями для $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n$, то в ней любая формула эквивалентна бескванторной формуле.*

Для доказательства демонстрируется, что экзистенциальная формула вида

$$(\exists x_1, \dots, x_n)\phi$$

эквивалентна бескванторной. Это доказательство почти в точности повторяет доказательство теоремы 1, но вместо новых кванторов мы применяем обратные функции для получения требуемых значений.

Таким образом доказывается, что при выполнении условия эффективной периодичности гиперфункций, теории являются разрешимыми.

В параграфе 3.3 устанавливаются некоторые достаточные условия для f_0 , при которых функции f_i будут эффективно периодичными по любому натуральному модулю.

Теорема 3. Пусть для любого $p > 1$ функция $f(x)$ периодична по модулю p с периодом меньше p . Тогда гиперфункция $F(x)$ от функции $f(x)$ является эффективно периодичной по модулю $p > 1$ с периодом 1 для любого p .

Доказательство проводится индукцией по модулю p , используя методы теории чисел.

Теорема 4. Пусть f — функция, согласованная со сложением, и для любого $p > 1$ функция $f(x)$ периодична по модулю p с периодом меньше p . Пусть $f_1(x)$ — периодичная функция. Тогда гиперфункция $F(x)$ от функции $f(x) + f_1(x)$ является периодичной по модулю p для любого $p > 1$.

Для доказательства показывается, что существует последовательность q_0, q_1, \dots, q_k такая, что $q_k < q_{k-1} < \dots < q_0$, и $f(x)$ периодична по модулю q_0 с периодом q_1 , по модулю q_1 — с периодом q_2, \dots , по модулю q_{k-1} — с периодом q_k , по модулю q_k с периодом 1, где q_0 — период $f_1(x)$. Далее показывается, что если доказать периодичность $F(x)$ по модулям q_0, q_1, \dots, q_k , то будет доказана периодичность $F(x)$ по модулю p , начиная с некоторого x . И, наконец, доказывается периодичность $F(x)$ по модулям q_0, q_1, \dots, q_k .

В четвёртой главе исследуется вычислительная сложность задачи разрешения теории T_f . **В параграфе 4.1** оценивается время работы алгоритма из параграфа 3.2. Доказывается ряд лемм(12–27), при помощи

которых оцениваются константы, используемые в разрешающем алгоритме из параграфа 3.2. В лемме 28 устанавливается, что формула длины n после одной итерации алгоритма из теоремы 1 в первом случае будет иметь длину не больше n^{20} для достаточно больших n . Далее в лемме 29 устанавливается, что формула длины n после одной итерации алгоритма из теоремы 1 во втором случае будет иметь длину не больше n^5 для достаточно больших n . Затем доказывается, что время работы разрешающего алгоритма для любой формулы из теории T_f не больше, чем $\underbrace{2^{2^{\dots^{2^n}}}}_{O(n) \text{ раз}}$, если исходная формула была длиной n :

Теорема 5. Пусть ϕ это формула $\neg(\exists x_1 \dots x_g)\phi'$. Пусть длина ϕ равна n . Тогда после одной итерации алгоритма из теоремы 1 длина ϕ для достаточно больших n не превосходит $\underbrace{2^{2^{\dots^{2^n}}}}_{M \text{ раз}}$, где M — некоторая константа.

Доказательство этой теоремы сводится к рассмотрению всех случаев из теоремы 1 и оценки длины формулы на каждом этапе, используя леммы 12–29.

Из этой теоремы получается следующее следствие.

Следствие 2. Если формулу ψ длины n привести к экзистенциальному виду по алгоритму, представленному в теореме 1, то её длина для достаточно больших n не будет превосходить $\underbrace{2^{2^{\dots^{2^n}}}}_{O(n) \text{ раз}}$.

Из теоремы 2 и следствия 2 получаем следующие результаты:

1. Если формулу ψ длины n привести к бескванторной по алгоритму из теоремы 2, то её длина для достаточно больших n не будет превосходить $\underbrace{2^{2^{\dots^{2^n}}}}_{O(n) \text{ раз}}$.
2. Разрешающий алгоритм из теоремы 2 для любой формулы ψ длины n работает не больше, чем $\underbrace{2^{2^{\dots^{2^n}}}}_{O(n) \text{ раз}}$ для достаточно больших n .
3. Задача разрешения теории T_f принадлежит классу $\text{TIME}\left(\underbrace{2^{2^{\dots^{2^n}}}}_{O(n) \text{ раз}}\right)$.

В параграфе 4.2 Доказано, что для любого разрешающего алгоритма существует формула длины n из теории T_f , для которой время работы алгоритма будет не меньше чем $\underbrace{2^{2^{\dots^2}}}_{O(n) \text{ раз}}$. Фишером и Рабином⁵ был продемонстрирован следующий метод для установления нижней границы времени для разрешения теорий со сложением. Пусть для функции g , которая растёт не медленнее экспоненты, в теории со сложением T существует константа $c > 0$ такая, что для любого числа $n \in \mathbb{N}$ и для любого двоичного слова w длины n существуют формулы $I_n(b)$, $J_n(b)$, $S(a, i)$, $H_w(x)$ длины, не превосходящей cn . $I_n(b)$ означает, что $b < g(n)^2$, $J_n(b)$ означает, что $b = g(n)$, $S(a, i)$ означает, что в a на $i^{\text{ом}}$ месте стоит 1, $H_w(x)$ означает, что первые $g(n)$ элементов последовательности x имеют вид $w0^{g(n)-n}$. Тогда для любого алгоритма, разрешающего T , время его работы занимает больше, чем $g(qn)$ шагов, где q — некоторая константа. Фактически доказано, что задача разрешения теории T является трудной в классе $\text{TIME}(g(O(n)))$.

Пусть $g(n)$ — это функция $\underbrace{2^{2^{\dots^2}}}_n$. Доказывается следующая теорема:

Теорема 6. Пусть в произвольной теории со сложением T существует формула логики первого порядка, которая любую пару натуральных чисел (u, v) взаимно однозначно кодирует натуральным числом. Тогда для теории T существует константа $c > 0$ такая, что для каждого n существует формула $\psi_n(a, y, x)$, которая кодирует любую последовательность натуральных чисел $a_0, \dots, a_{g(n+1)-1}$, то есть для любой такой последовательности существует a и для любого

$$y = 0, 1, \dots, g(n+1) - 1 :$$

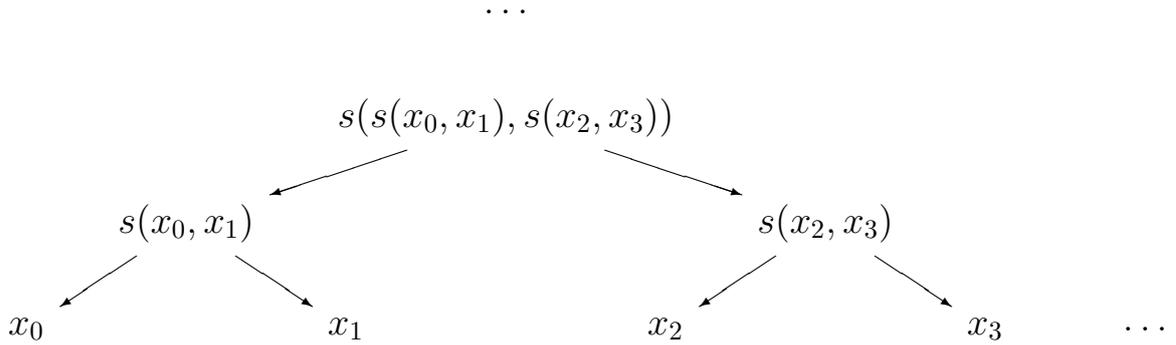
$$\psi_n(a, y, x) \iff y < g(n+1) \wedge x = a_y.$$

Также длина $\psi_n(a, y, x)$ не превосходит cn .

Формула $\psi_n(a, y, x)$ строится по индукции. Для $n = 0$, она получается из условия теоремы. Чтобы построить $\psi_{n+1}(a, y, x)$, сначала через

$\psi_n(a, y, x)$ определяются упомянутые выше формулы $S_n(x, y)$, $J_n(y)$, $I_n(y)$.
 Формула $H_w(x)$ строится, используя формулу $S_n(x, y)$.

Пусть $s(x, y)$ — это код пары (x, y) . Представим последовательность произвольных чисел $x_0, \dots, x_{g(k+2)-1}$ в виде полного бинарного дерева $D_h(x_0, x_1, \dots, x_{2^h-1})$, где $h = g(k+1)$ — высота дерева, $x_0, x_1, \dots, x_{2^h-1}$ — элементы в листьях дерева, а любая внутренняя вершина содержит код пары своих сыновей:



Кодом дерева (и всей последовательности) будет число, стоящее в корне. Чтобы закодировать путь от корня к листу с номером y , нам достаточно для каждого j знать, к какому сыну: левому или правому — следует идти от вершины на глубине j . Следовательно, весь путь можно закодировать последовательностью нулей и единиц длины h . Используя $\psi_n(a, y, x)$, можно эту последовательность закодировать, благодаря чему, имеем возможность построить $\psi_{n+1}(a, y, x)$. Благодаря тождественным преобразованиям и свойствам $\psi_n(a, y, x)$, длина $\psi_{n+1}(a, y, x)$ возрастает не более чем на некоторую константу.

Последняя теорема работы устанавливает достаточное условие, при котором в теории существует формула, взаимно однозначно кодирующая два натуральных числа.

Теорема 7. *Если в теории системы $\text{Th}(\omega, 0, 1, <, +, f)$ выполняется условие $f(x+1) > \frac{1+\sqrt{5}}{2}f(x)$ для любого x , то в ней существует формула, которая взаимно однозначно кодирует два натуральных числа.*

При выполнении условия из теоремы, получается:

$$f(x+y+2) > f(x+y+1) + f(x).$$

Пара чисел (x, y) кодируются следующим образом:

$$a = f(x) + f(x + y + 1).$$

Далее, показывается, что по a можно однозначно восстановить x и y . Поэтому формула, которая взаимно однозначно кодирует два натуральных числа, будет выглядеть так:

$$\begin{aligned} \psi(a, y, x) \iff & (y = 0 \wedge (\exists u)(a = f(x) + f(x + u + 1))) \vee \\ & \vee (y = 1 \wedge (\exists u)(a = f(u) + f(x + u + 1))). \end{aligned}$$

Как следствие получаем:

1. Если в теории системы $\text{Th}(\omega, 0, 1, <, +, f_0, f_1, \dots, f_m)$ выполняется условие $f_0(x + 1) > \frac{1+\sqrt{5}}{2}f_0(x)$ для любого x , то задача разрешения для неё будет полной в классе $\text{TIME}\left(\underbrace{2^{2^{\dots^2}}}_{O(n) \text{ раз}}\right)$.
2. Задачи разрешения для теорий $\text{Th}(\omega, 0, 1, <, +, 2^x)$ и $\text{Th}(\omega, 0, 1, <, +, x!)$ будут полными в классе $\text{TIME}\left(\underbrace{2^{2^{\dots^2}}}_{O(n) \text{ раз}}\right)$.

В заключении ещё раз перечисляются полученные результаты и формулируются открытые вопросы, которые могут служить направлением дальнейших исследований. Также в заключении выражается благодарность участникам семинара по математической логике ПОМИ РАН и лично академику Ю.В.Матиясевичу, участникам семинара «Теоретические основы информатики» в ТвГУ за ценные советы и замечания.

Публикации в рецензируемых научных журналах

- [1] Снятков А.С. Разрешимость теории $T_f = \text{Th}(\omega, 0, 1, <, +, f(x), F(x))$. // Вестник ТвГУ сер. Прикл. матем., 14(34), 2008. С. 67–77
- [2] Снятков А.С. Разрешимость теории $T_f = \text{Th}(\omega, 0, 1, <, +, f(x), \dots, f_n)$. // Модел. и анализ информ. систем., 17:3, 2010, С. 72–90

- [3] Снятков А.С. Нижняя граница времени для разрешения теории с функцией экспоненты // Вестник ТвГУ, сер. Прикл. матем., 17. Выпуск 2 (25), 2012. С. 5-10.

Другие публикации

- [4] Снятков А.С. Разрешимость теории $T_c = \text{Th}(\omega, 0, 1, <, +, c^x, \mathfrak{e}^x)$. // Вестник ТвГУ сер. Прикл. матем., 5(35), 2007. С. 113–121
- [5] Снятков А.С. Разрешимость теории $T_f = \text{Th}(\omega, 0, 1, <, +, f(x), \dots, f_n)$. // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Сборник трудов международной конференции, 2011, С. 362-365.