На правах рукописи

Тряхов Михаил Сергеевич

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМОВ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПОВЕДЕНИЕМ РЕШЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТЕЛЕСКОПИЧЕСКОГО МАНИПУЛЯТОРА

Специальность 05.13.18. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ярославль – 2015

Работа выполнена на кафедре «Математического моделирования» математического факультета ФГБОУ ВПО Ярославского государственного университета имени П. Г. Демидова.

Научный руководитель : доктор физ.-мат. наук, профессор

Кубышкин Евгений Павлович

Официальные оппоненты : **Баландин Дмитрий Владимирович**

доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений, математического и численного анализа ФГБОУ ВПО «Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского»

Зейфман Александр Израилевич

доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики ФГБОУ ВПО «Вологодский государственный университет»

Ведущая организация: Обнинский институт Атомной Энергетики филиал Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ» (ИАТЭ НИЯУ МИФИ).

Защита состоится «11» декабря 2015 г. в 17:00 ч. на заседании диссертационного совета Д 212.002.05 при Ярославском государственном университете им. П. Г. Демидова по адресу 150000 г. Ярославль, ул. Советская, д. 14.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ярославского государственного университета им. П. Г.Демидова по адресу: 150000, г. Ярославль, ул. Полушкина Роща, д. 1 и на официальном сайте организации:

http://www.rd.uniyar.ac.ru/science/dissers/fulltexts/razrabotka-algoritmov-optimalnogo-upravleniya-povedeniem-resheniy-matematicheskoy-modeli-teleskopich/

Автореферат разослан «9» ноября 2015 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Глызин С. Д.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Диссертация посвящена разработке алгоритмов оптимального управления поведением решений математической модели телескопического манипулятора. Манипулятор состоит из твердого тела (направляющей), которое представляет собой полый цилиндр, внутри которого вдоль оси цилиндра расположен однородный вал постоянного кольцевого сечения, на конце которого расположен схват. Рука манипулятора может перемещаться вдоль оси направляющей. Вся механическая система может поворачиваться вокруг оси, проходящей через центр масс твердого тела перпендикулярно оси цилиндра. Манипулятор имеет две транспортные степени свободы - поворот манипулятора и перемещение руки со схватом. Под действием управляющего момента и внешней силы система соответственно может поворачиваться и перемещать руку вдоль своей оси. Предполагается, что рука обладает упругой податливостью. Упругая податливость руки моделируется упругим стержнем в рамках модели Эйлера-Бернули. Математическая модель изучаемой механической системы представляет собой гибридную систему дифференциальных уравнений, т.е. систему, содержащую как обыкновенные дифференциальные уравнения, так и уравнения с частными производными, связь между ними осуществляется через интегральные операторы и функционалы. Изучается задача перевода решений математической модели из начального фазового состояния в конечное в заданный момент времени, минимизируя некоторые функционалы от управлений и задача быстродействия при ограничении значений функционалов от управлений.

Манипуляторы подобного вида являются составными частями сложных робототехнических комплексов, используемых в разных областях науки, промышленности и обороны. Разработка алгоритмов оптимального управления поведением таких устройств, учитывающих их упругие свойства, является весьма актуальной задачей. Полученные результаты могут представлять как научный интерес, так и практическую значимость - могут быть использованы при проектировании роботехнических комплексов.

Степень разработанности темы исследований. Решению задач управления механическими системами, содержащими упругие элементы, посвящена обширная литература. Отметим, во-первых, монографию Черноусько Ф.Л., Болотника Н.Н., Градецкого В.Г.[1], которая содержит большой библиографический обзор. В монографии наряду со многими другими рассмотрена также изучаемая в диссертации задача управления телескопическим манипулятором. Показано существование программных управлений, переводящих систему из одного состояния в другое, однако задачи оптимального управления в

[1]Болотник, Н. Н. Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация: монография / Ф. Л. Черноусько, Н. Н. Болотник, В. Г. Градецкий. — М.: Наука, 1989. — 368 с.

монографии не рассматривались. Большое количество работ посвящено задачам управления поведением твердого тела с упругим стержнем. Такая система изучалась в работе Бербюка В.Е.[2], где решаются различные проблемы динамики и оптимизации управляемых дискретно-континуальных систем, моделирующих роботы, шагающие аппараты, манипуляторы и др. Рассмотрена задача[3] оптимального управления поворотом двух твердых тел, связанных между собой упругим стержнем. Основной метод исследования, возникающих при этом дискретно-распределенных систем – это замена распределенной составляющей конечномерной по методу Галёркина. В качестве базисных функций берутся балочные функции. Для конечномерного аналога строится оптимальное управление, которое и берется в качестве управления распределенной системой. В работе[4] Sakawa Y., Ito R., Fujii N., где рассматривается задача поворота гибкой руки манипулятора с полным гашением поперечной вибрации в конце процесса управления, используется метод приближений Галёркина. При изучении задач управления медленно вращающейся балкой Тимошенко Krabs W., Sklyar G.M.[5] также использовали метод Галеркина. Авторы показали, что существует не более чем счетная последовательность значений радиуса диска, при которых балка Тимошенко не является управляемой (не стабилизируемой). В статьях Бербюка В.Е. и Демидюка М.В.[6] задачи динамики и оптимизации манипуляционных роботов с распределенными параметрами решаются методами, основанными на концепции обратных задач динамики. Асимптотические методы построения оптимальных управлений и их приложение к решению различных задач механики рассмотрены в монографии Акуленко Л.Д.[7].

Говоря об управлении системами с распределенными параметрами в общем, нельзя не упомянуть монографию Бутковского А.Г.[8], где положено начало системному использованию проблемы моментов в решении задач управления распределенными системами. Исследования Лурье К.А.[9] способствовали широкому распространению операторного под-

[2]Бербюк, В. Е. Динамика и оптимизация робототехнических систем. Киев: Наукова думка, 1989. 192 с.

[3]Бербюк, В. Е. Об управляемом вращении системы двух твердых тел с упругими элементами. ПММ. — 1984. — Т. 48, Вып. 2. — С. 238–246.

[4]Sakawa, Y. Optimal control of rotation of a flexible arm. Control Theory for Distributed Parameter Systems and Applications. Lecture Notes in Control and Information Sciences. 1983. V. 54 P. 175–187.

[5]Krabs, W. On the controllability of a slowly rotating Timoshenko beam. Z. Anal. Anwends. 1999. V.18, № 2. — P. 437–448.

[6]Бербюк, В. Е. Об управляемом движении упругого манипулятора с распределенными параметрами. Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1984. № 2. С. 59–67.

[7]Акуленко, Л. Д. Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 368 с.

[8]Бутковский, А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1965. 474 с.

[9]Лурье, К. А. Операционное исчисление и его приложения к задачам механики. М.: ГИТТЛ, 1951. 432 с.

хода в области задач управления объектами с распределенными параметрами. Вопросам о необходимых условиях типа принципа максимума Понтрягина Л.С. в задачах оптимального управления в уравнениях с частными производными посвящена его монография[10]. Широкий круг задач теории оптимального управления системами с распределенными параметрами освещен в работе Лионса Ж.-Л.[11].

Цели и задачи работы. Основной целью работы является разработка и обоснование нового метода построения оптимальных управлений поведением решений математической модели телескопического манипулятора, рука которого обладает упругой податливостью. Рассмотрены задачи оптимального управления перевода решения из начального фазового состояния в конечное в заданный момент времени с минимумом нормы управляющих функций в пространствах L_2 и L_∞ и задачи быстродействия при ограничении нормы управляющих функций в этих пространствах.

Научная новизна. Теоретическая и практическая значимость работы. В диссертации разработан новый метод построения оптимальных управлений поведением решений математической модели телескопического манипулятора, рука которого обладает упругой податливостью. Метод основан на сведении задач управления поведением решений начально-краевой задачи для гибридной системы дифференциальных уравнений, являющейся математической моделью рассматриваемой механической системы, к нелинейной проблеме моментов. Решение проблемы моментов осуществляется итерационными методами. Указанный подход является новым и может быть использован при решении других задач оптимального управления механическими системами, содержащими распределенные и сосредоточенные элементы, а также при проектировании подобных систем.

Методы исследования. В диссертационной работе в качестве метода исследования сформулированных в начале введения задач оптимального управления используется подход, предложенный в работах Кубышкина Е.П.[12,13]. Подход основан на сведении задач оптимального управления поведением решений начально-краевых задач для гибридных систем дифференциальных уравнений к проблеме моментов в функциональных пространствах. Для решения проблемы моментов, которые бывают часто нелинейными, привлекаются либо аналитические, либо итерационные методы.

---

[10] Лурье, К. А. Оптимальное управление в задачах математической физики. М.: Наука, 1975. 480 с.

[11] Лионс, Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 416 с.

[12] Кубышкин Е.П. Оптимальное управление поворотом твердого тела с гибким стержнем. ПММ. 1992. Т. 56, № 2. С. 240-249.

[13] Кубышкин Е. П. Оптимальное управление поворотом двух тел, соединенных упругим стержнем. ПММ. 2014. — Т. 78 №5. — С. 656-670.

Положения, выносимые на защиту.

1. Разработан алгоритм оптимального управления поведением решений математической модели поворота твердого тела с упругим стержнем из начального положения в конечное в заданный момент времени с минимизацией нормы управляющей функции в пространстве L_∞.

2. Разработан алгоритм решения задачи быстродействия для математической модели поворота механической системы, состоящей из твердого тела с упругим стержнем при ограничении нормы управляющей функции в пространстве L_∞.

3. Разработан алгоритм построения оптимального управления поведением решения математической модели телескопического манипулятора из начального фазового состояния в конечное в заданный момент времени с минимумом норм управляющих функций в пространствах L_2, L_∞.

4. Для математической модели телескопического манипулятора разработан алгоритм построения оптимального управления в задаче быстродействия при ограничении норм управляющих функций в пространствах L_2, L_∞.

Степень достоверности и апробация результатов. Результаты диссертации опубликованы в десяти (включая четыре из них в изданиях перечня ВАК) работах автора. Для построения оптимальных управлений разработан программный комплекс, прошедший государственную регистрацию программы для ЭВМ[14]. Результаты докладывались на Воронежской зимней математической школе «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (Воронеж, 2013); международной конференции «Нелинейная динамика и ее приложения», посвященной столетию со дня рождения Поля Пенлеве (1863-1933) (Ярославль, 2013); II Международной молодежной научно-практической конференции (Ярославль, 2014); International Conference «Nonlinear Methods in Physics and Mechanics» (Munich, Germany, 2014); III Международной молодежной научно-практической конференции (Ярославль, 2015); Международная научная конференция «Нелинейные методы в физике и механике» (Ярославль, 2015).

Работа выполнена при поддержке проекта №984 «Методы исследования динамики сингулярно возмущенных бесконечномерных систем» в рамках базовой части государственного задания на НИР ЯрГУ.

Основное содержание работы

[14] Тряхов М. С. Программный комплекс расчета оптимальных управлений движениями руки телескопического манипулятора. Свидетельство государственной регистрации программы для ЭВМ. № 2015617666. Дата регистрации в реестре программ для ЭВМ 17 июля 2015.

Во введении обосновывается актуальность выбранного направления исследования, научная новизна и практическая ценность выполненных исследований, приводится краткий обзор работ по теме диссертации и смежным вопросам, а также кратко излагаются полученные в диссертации результаты.

В первой главе дается описание рассматриваемой механической системы (телескопического манипулятора). Система состоит из твердого тела (направляющей), которое представляет собой полый цилиндр (однородный, постоянного кольцевого сечения), внутри которого вдоль оси цилиндра расположен однородный вал постоянного кольцевого сечения (рука манипулятора), на конце которого находится схват. Рука манипулятора может без трения перемещаться вдоль оси направляющей и обладает упругой податливостью. Вся механическая система может поворачиваться вокруг оси, проходящей через центр масс направляющей перпендикулярно оси цилиндра. Сформулированы гипотезы, в рамках которых рассматриваются движения системы, приведен вывод уравнений движения, осуществлен переход к безразмерным переменным. Результатом является следующая математическая модель рассматриваемой системы, представляющая собой начально-краевую задачу вида

$$J(l)\ddot{\theta} - \int_0^l (b+l-x)u_{tt}(x,t)dx + 2\dot{l}\dot{\theta}(b+l-\frac{1}{2}) = M(t), \tag{1}$$

$$\ddot{l} - \dot{\theta}^2(b+l-\frac{1}{2}) = F(t), \tag{2}$$

$$u_{tt} + u_{xxxx} = \ddot{\theta}(b+l-x) + 2\dot{\theta}\dot{l}, \tag{3}$$

$$u_{xx}(0,t) = u_{xxx}(0,t) = 0, u_x(l,t) = u(l,t) = 0, \tag{4}$$

$$\theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0, l(0) = l_0, \dot{l}(0) = \dot{l}_0, u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = \dot{u}_0(x), \tag{5}$$

$$J(l) = J + 1/3 + (b+l)(b+l-1),$$

относительно функций $\theta(t), l(t), u(x,t)$ в области $Q_{lT} = \{0 \le x \le l, 0 \le t \le T\}$ с переменной границей $0 < l(t) \le 1$. В (1)-(2) функции $M(t)$ и $F(t)$ характеризируют соответственно управляющий момент внешней силы, осуществляющий поворот системы и силу, приложенную к руке манипулятора и вызывающую ее перемещение.

Ниже, как обычно, $L_1(0,T)$, $L_2(0,T)$, $W_2^k(0,T)$, $L_\infty(0,T)$ — пространства определенных на $[0,T]$ вещественнозначных интегрируемых по Лебегу функций $u(t)$, для которых соответственно $\|u\|_{L_1(0,T)} = \int\limits_0^T |u(t)|dt < \infty$, $\|u\|_{L_2(0,T)} = (\int\limits_0^T u^2 dt)^{1/2} < \infty$, $\|u\|_{W_2^k(0,T)} = \sum\limits_{j=0}^k \|u^{(j)}\|_{L_2(0,T)}$, $\|u\|_{L_\infty(0,T)} = vrai\sup\limits_t |u(t)| < \infty$.

Для начально-краевой задачи (1)-(5) формулируются следующие задачи оптимального управления.

Задача 1 *Определить функции $F(t)$, $M(t) \in L_2(0,T)$, переводящие решение начально-краевой задачи (1)-(5) из начального состояния (5) в конечное*

$$\theta(T) = \theta_T,\ \dot{\theta}(T) = \dot{\theta_T},\ l(T) = l_T,\ \dot{l}(T) = \dot{l}_T,\ u(x,T) = u_T(x),\ \dot{u}_t(x,T) = \dot{u_T}(x) \tag{6}$$

в заданный момент времени T и минимизирующие функционал

$$\Phi_1(F,M) = \|F(t)\|^2_{L_2(0,T)} + \|M(t)\|^2_{L_2(0,T)}.$$

Задача 2 (Задача быстродействия). *Определить функции $F(t)$, $M(t) \in L_2(0,T)$, переводящие решение начально-краевой задачи (1)-(4) из начального состояния (4) в конечное (5) за минимальное время T при условии $\|\Phi_1(F,M)\| \leq P_1 < \infty$.*

Задача 3. *Определить функции $F(t)$, $M(t) \in L_\infty(0,T)$, переводящие решение начально-краевой задачи (1)-(5) из начального положения (5) в конечное (6) в заданный момент времени T, минимизируя функционал*

$$\Phi_2(F,M) = \|F(t)\|_{L_\infty(0,T)} + \|M(t)\|_{L_\infty(0,T)}$$

Задача 4 (Задача быстродействия). *Определить функции $F(t)$, $M(t) \in L_\infty(0,T)$, переводящие решение начально-краевой задачи (1)-(5) из начального состояния (5) в конечное (6) за минимальное время T при условии $\Phi_2(F,M) \leq P_2 < \infty$.*

Во второй главе рассматривается задача поворота манипулятора, т.е. предполагается, что $l(t) \equiv l_0 = const$. В этом случае из начально-краевой задачи (1)-(5) выпадает уравнение (2). Система приобретает вид

$$J(l_0)\ddot{\theta} - \int\limits_0^{l_0} (b + l_0 - x)u_{tt}(x,t)dx = M(t), \tag{7}$$

$$u_{tt} + u_{xxxx} = (b + l_0 - x)\ddot{\theta}, \tag{8}$$

$$u_{xx}(0,t) = u_{xxx}(0,t) = 0, u(l_0,t) = u_x(l_0,t) = 0, \tag{9}$$

$$\theta(0) = \theta_0,\ \dot{\theta}(0) = \dot{\theta},\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x). \tag{10}$$

Для начально-краевой задачи (7)-(10) в предположении $M(t) \in L_2(0,T)$ и $M(t) \in L_\infty(0,T)$ сформулировано понятие решения, введены функциональные пространства, определяющие начальные условия и решение, показано существование решения, его единственность, получена аналитическая формула решения. Для ее написания введем функции $v_n(x,l_0) \quad (j = 1,2)$, являющиеся полной системой собственных функций спектральной краевой задачи

$$v^{\mathrm{IV}}(x) = \lambda \left(v(x) - J^{-1}(l_0)(b + l_0 - x) \int_0^{l_0} (b + l_0 - x_1)v(x_1)dx_1 \right),$$

$$v''(0) = v'''(0) = 0,\ v'(l_0) = v(l_0) = 0,$$

отвечающих однократным собственным значениям $\lambda_n = \lambda_n(l_0)$, $0 < \lambda_1(l_0) < \lambda_2(l_0) < \ldots$. При этом $\lambda_n(l_0) = \beta_n^4(l_0)$, где $\beta_n(l_0)$ - положительные корни некоторого характеристического уравнения, а для $v_n(x, l_0)$ выполняются следующие условия ортогональности

$$\langle v_n(x, l_0),\ v_m(x, l_0)\rangle = \delta_{nm},$$

$$\langle u(x), v(x)\rangle = (u(x), v(x))_{L_2} - J^{-1}(l_0)(b + l_0 - x, u(x))_{L_2}(b + l_0 - x, v(x))_{L_2}. \qquad (11)$$

Введем также следующие функциональные пространства. $H(0, l_0)$ - пространство функций $u(x) \in L_2(0, 1)$, снабженное скалярным произведением (11) и нормой $\|u(x)\|_H = \langle u(x), u(x)\rangle^{1/2}$. Через $H_j(0, l_0) \quad (j = 1, 2, 3)$ обозначим пространство функций вида

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n\ v_n(x, l_0), \quad u_n = \langle u(x),\ v_n(x, l_0)\rangle\,, \quad \|u(x)\|_{H_j} = (\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^j(l_0) u_n^2(x))^{1/2} < \infty,$$

$\omega_n(l_0) = \beta_n^2(l_0)$. Через $H_2(Q_T)$ ($Q_T = \{(x, t), 0 < x < l_0, 0 < t < T\}$) обозначим гильбертово пространство функций $u(x, t)$, полученных замыканием множества непрерывно дифференцируемых по соответствующим переменным указанное число раз функций $u(x, t) \in C^{3,1}(\overline{Q_T})$, $u_{xx}(0, t) = u_{xxx}(0, t) = 0$, $u(l_0, t) = u_x(l_0, t) = 0$ в норме

$$\|u(x, t)\|_{H_2(Q_T)} = (u(x, t), u(x, t))^{1/2}_{H_2(Q_T)}\,,$$

$$(u(x, t), v(x, t))_{H_2(Q_T)} = (u_{xx}(x, t), v_{xx}(x, t))_{L_2(Q_T)} + \int\limits_0^T \langle u_t(x, t), v_t(x, t)\rangle dt.$$

Функции

$$u_0(x) \in H_2(0, l_0), u_1(x) \in H(0, l_0). \qquad (12)$$

представим в виде

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^{-1} a_{0n}(l_0) v_n(x, l_0), \quad a_{0n}(l_0) = \omega_n(l_0)\langle u_0(x), v_n(x, l_0)\rangle, \quad \|u_0(x)\|^2_{H_2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{0n}^2(l_0),$$

$$\dot{u_0}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{0n}(l_0) v_n(x, l_0), \quad b_{0n}(l_0) = \langle \dot{u}_0(x), v_n(x, l_0)\rangle, \quad \|\dot{u_0}(x)\|^2_H = \sum_{n=1}^{\infty} b_{0n}^2(l_0), \qquad (13)$$

$$b + l_0 - x = \sum_{n=1}^{\infty} d_n(l_0) v_n(x, l_0), \quad d_n(l_0) = \langle b + l_0 - x, v_n(x, l_0)\rangle, \quad \|b + l_0 - x\|^2_H = \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2(l_0).$$

Утверждение 1. *Пусть $M(t) \in L_2(0, T)$, тогда решение $\theta(t), u(x, t)$ начально-краевой задачи (7)-(10) с начальными условиями (10), (12) существует, единственно и представимо в виде*

$$\theta(t) = \theta_0 + \theta_1 t + J_0^{-1}\big(\langle b + l_0 - x, \dot{u_0}(x)\rangle t - \langle b + l_0 - x, u(x, t)\rangle + \langle b + l_0 - x, u_0(x)\rangle\big) +$$

$$+J^{-1}(l_0)\int\limits_0^t (t-t_1)M(t_1)dt_1, \tag{14}$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x,l_0)\omega_n(l_0)^{-1}\big(a_{0n}(l_0)\cos(\omega_n(l_0)t)+b_{0n}(l_0)\sin(\omega_n(l_0)t)+$$

$$+J_0^{-1}(l_0)d_n(l_0)\int\limits_0^t \sin(\omega_n(l_0)(t-\tau))M(\tau)d\tau\big), \tag{15}$$

где $a_{0n}(l_0),\ b_{0n}(l_0),\ d_n(l_0)$ определены в (13), $J_0^{-1}(l_0)=J(l_0)+b^2l_0-bl_0^2-l_0^3/3>0$, при этом справедлива оценка

$$\|u(x,t)\|_{H_2(Q_T)}\le C\Big(\,\|u_0(x)\|^2_{H_2}+\|\dot{u}_0(x)\|^2_H+\|b+l_0-x\|^2_H\,\|M(t)\|^2_{L_2(0,T)}\Big)^{1/2},$$

где $C>0$ – некоторая постоянная.

В случае $M(T)\in L_\infty(0,T)$ из неравенства $\|M(t)\|_{L_2(0,T)}\le T^{1/2}\|M(t)\|_{L_\infty(0,T)}$ справедлива аналогичная оценка.

Утверждение 2. *Величины*

$$d_n(l_0)\ne 0\ \ (n=1,2,...),\ \ d_n(l_0)=O(n^{-1})\ \text{ при }\ n\to\infty.$$

Обозначим $a_{Tn}(l_0)=\omega_n(l_0)\langle u_T(x),v_n(x,l_0)\rangle,\quad b_{Tn}(l_0)=\langle \dot{u}_T(x),v_n(x,l_0)\rangle\quad (n=1,2,...)$.

С учетом этого, условие перевода решения начально-краевой задачи (7)-(10) из начального фазового состояния (10) в конечное (6) согласно (14), (15) запишется в виде

$$\int\limits_0^T M(t)dt=J(l_0)(\dot\theta_T-\dot\theta_0)-J(l_0)J_0^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}d_n(l_0)(b_{Tn}(l_0)-b_{0n}(l_0))=\alpha_1(T),$$

$$\int\limits_0^T tM(t)dt=J(l_0)(\theta_0-\theta_T+\dot\theta_T T)-J(l_0)J_0^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}d_n(l_0)(a_{0n}\omega_n^{-1}(l_0)-a_{Tn}(l_0)\omega_n^{-1}(l_0)-b_{Tn}(l_0)T)=$$

$$=\alpha_2(T),$$

$$\int\limits_0^T \sin(\omega_n(l_0)t)M(t)dt=J_0(l_0)d_n^{-1}\left(-a_{Tn}(l_0)\cos(\omega_n(l_0)T)+b_{Tn}(l_0)\sin(\omega_n(l_0)T)+a_{0n}(l_0)\right)=$$

$$=\alpha_{2n+1}(T),$$

$$\int\limits_0^T \cos(\omega_n t)M(t)dt=J_0(l_0)d_n^{-1}(l_0)(a_{Tn}(l_0)\sin(\omega_n(l_0)T)+b_{Tn}(l_0)\cos(\omega_n(l_0)T)-b_{0n}(l_0))=$$

$$=\alpha_{2n+2}(T)\quad (n=1,2,...).$$

Утверждение 3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2(T) < \infty.$$

Обозначим

$$\varphi_1(t) = 1,\ \varphi_2(t) = t,\ \varphi_{2n+1}(t) = \sin\left(\omega_n(l_0)t\right),\ \varphi_{2n+2}(t) = \cos\left(\omega_n(l_0)t\right),\ n = 1, 2, \cdots \quad (16)$$

Задача 1 сводится к решению следующей проблемы моментов в пространстве $L_2(0,T)$.

Найти функционал

$$F_2(u) = (u(t), M(t))_{L_2(0,T)}, \quad M(t) \in L_2(0,T), \quad \|F_2\| = \|M(t)\|_{L_2(0,T)}, \quad (17)$$

удовлетворяющий условиям

$$F_2(\varphi_j(t)) = \alpha_j(T) \quad (j = 1, 2, ...) \quad (18)$$

и имеющий минимальную норму $\|F_2\|_{min} = m_2(T)$.

Обозначим через $Q_2(0,T)$ подпространство $L_2(0,T)$, являющееся замкнутой в норме этого пространства линейной оболочкой функций (16).

Утверждение 4. *Функции (16) образуют базис Рисса в* $Q_2(0,T)$.

По системе функций $\varphi_j(t)$ построим ортонормированную в $L_2(0,T)$ систему функций $\psi_j(t)$, используя ортогонализацию Шмидта. Это определяет бесконечномерную нижнюю треугольную матрицу $B(T) = \{B_{ij}(T)\}_{i,j=1..\infty}$, определяющую ограниченный и ограниченно обратимый оператор в l_2. Обозначим через $\beta(T) \in l_2$ вектор полученный преобразованием $\beta(T) = B(T)\ \alpha(T),\ \alpha(T) = (\alpha_1(T), \alpha_2(T), ...)$.

Утверждение 5. *Решение задачи 1 для начально-краевой задачи (7)-(10) (проблемы моментов (17)-(18)) единственно и задается формулой*

$$M^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(T)\psi_n(t), \quad \|M^*(t)\|_{L_2(0,T)} = (\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^2(T))^{1/2} = m_2(T). \quad (19)$$

Обозначим через $S(m_2(T))$ множество функционалов вида (17), имеющих норму $m_2(T)$, каждый из которых характеризуется функцией $M(t)$. Имеющий единичную норму элемент $e_0(t) = M^*(t)/\|M^*(t)\|_{L_2(0,T)}$, назовем экстремальным. Обобщением функционального подхода к задачам оптимального управления[15], на рассматриваемый бесконечномерный случай является следующее утверждение.

Утверждение 6 (Принцип максимума). *Оптимальный функционал* $F_2^*(u)$, *вида (17) и определяемый функцией* $M^*(t)$, *выделяется из всех функционалов вида (17), имеющих ту же норму* $m_2(T)$, *следующим свойством максимума на экстремальном элементе*

$$F_2^*(e_0) = \max_{F(u) \in S(m_2(T))} F_2(e_0).$$

[15] Красовский, Н. Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.

Утверждение 7.

$$\lim_{T\to 0} m_2(T) = \infty, \quad \lim_{T\to\infty} m_2(T) = 0. \tag{20}$$

Обозначим через T^* первый положительный корень уравнения $m_2(T) = P_1$.

Утверждение 8. *Решение задачи 4 дает пара $(T^*, M^*(t))$, где $M^*(t)$ определяется формулой (19).*

Линейный непрерывный функционал в пространстве $L_1(0,T)$ имеет вид

$$F_1(u) = \int_0^T u(t)M(t)dt, \quad M(t) \in L_\infty(0,T), \quad \|F_1\| = \|M(t)\|_{L_\infty}. \tag{21}$$

Задача 3 сводится к решению следующей проблемы моментов в пространстве $L_1(0,T)$.

Найти функционал вида (21), удовлетворяющий условиям

$$F(\varphi_j(t)) = \alpha_j(T) \quad (j = 1, 2, ...) \tag{22}$$

и имеющий минимальную норму $\|F_1\|_{min} = m_1(T)$.

Обозначим через $Q_1(0,T)$ подпространство $L_1(0,T)$, полученное замыканием в норме пространства $L_1(0,T)$ множества функций вида $u_N(t) = \sum\limits_{j=1}^{N} \xi_j\varphi_j(t)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, ...) \in l_2$. В силу соотношения $\|u_N(t)\|_{L_1(0,T)} \leq T^{1/2}\|u_N(t)\|^2_{L_2(0,T)}$ и утверждения 4 $Q_1(0,T)$ является замкнутым линейным подпространством $L_1(0,T)$.

Введем двойственную к указанной проблеме моментов задачу.

При условии $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \xi_j\alpha_j(T) = 1 \quad (\xi = (\xi_1, \xi_2, ...) \in l_2)$, *найти*

$$\min_{\xi\in l_2} \|\sum_{j=1}^{N} \xi_j\varphi_j(t)\|_{L_1(0,T)} = \|\sum_{j=1}^{N} \xi^*_j\varphi_j(t)\|_{L_1(0,T)} = \|u^*(t)\|_{L_1(0,T)} = l^{-1}(T).$$

Утверждение 9. $m_1(T) = l(T)$.

Утверждение 10. *Решение задачи 3 (проблема моментов (21),(22)) дается формулой*

$$M^*(t) = l(T)sign(u^*(t)). \tag{23}$$

Обозначим через $S(m_1(T))$ множество функционалов вида (21), имеющих норму $m_1(T)$, каждый из которых характеризуется функцией $M(t)$. Имеющий единичную норму элемент $e_0(t) = u^*(t)/\|u^*(t)\|_{L_1(0,T)}$, назовем экстремальным.

Утверждение 11 (Принцип максимума). *Оптимальный функционал $F_*(u)$ вида (21) и определяемый функцией $M^*(t)$, выделяется из всех функционалов вида (21), имеющих ту же норму $m_1(T)$, следующим свойством максимума на любом экстремальном* *элементе*

$$F_*(e_0) = \max_{M(t)\in S(m_1(T))} F(e_0).$$

Утверждение 12.

$$\lim_{T\to 0} m_1(T) = \infty, \quad \lim_{T\to\infty} m_1(T) = 0. \tag{24}$$

Обозначим через T^* первый положительный корень уравнения $m_1(T) = P_2$.

Утверждение 13. *Решение задачи 4 дает пара $(T^*, M^*(t))$, где $M^*(t)$ определяется формулой (23).*

В третьей главе изучается система (1)-(5) в предположении, что $l(t)$ - известная функция. В этом случае уравнение (2) также выпадает из рассматриваемой начально-краевой задачи. Краевая задача рассматривается в области с заданной переменной границей и имеет вид

$$J(l)\ddot{\theta} - \int\limits_0^l (b + l - x_1)u_{tt}(x,t)dx = M(t), \tag{25}$$

$$u_{tt} + u_{xxxx} = (b + l - x)\ddot{\theta}_1 + f(x,t), \tag{26}$$

$$u_{xx}(0,t) = u_{xxx}(0,t) = 0, u_x(l,t) = u(l,t) = 0, \tag{27}$$

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = \dot{u}_0(x), \quad (0 \le x \le l_0) \tag{28}$$

относительно функций $\theta = \theta(t)$, $u = u(x,t)$ в области $Q_{1,T} = \{0 \le x \le l, 0 \le t \le T)\}$, где $l = l(t) \in W_2^2(0,T)$, $0 < l(t) \le 1$, $l_0 = l(0)$, $M(t) \in L_2(0,T)$, $b > 0$ - постоянная, функция $f(x,t)$ при каждом t принадлежит $L_2(0,l)$ $(L_\infty(0,l))$ и непрерывна по t в метрике этого пространства, $u_0(x)$ и $\dot{u}_0(x)$ - заданные функции, принадлежащие $H_2(0,l_0)$ и $H(0,l_0)$ соответственно.

Для начально-краевой задачи (25)-(28) дается определение решения, доказано существование решения, непрерывная зависимость решения от начальных условий и параметров краевой задачи. Показано, что решение задачи (25)-(28) может быть представлено в виде

$$\theta(t) = \theta_0 + \dot{\theta}_0 t - \int\limits_0^t (t - t_1)\{(bu_{xxx}(l(t_1), t_1; l_1) + u_{xx}(l(t_1), t_1; l_1)) +$$

$$+ \int\limits_0^{l(t)} (b + l(t_1) - x)f(x,t_1)dx - M(t_1)\} \cdot J_0^{-1}(l(t_1))dt_1, \tag{29}$$

$$u(x,t;l_1) = u_0(x,t;l_1) + u_1(x,t;l_1) + \int\limits_0^t w^*(x,t,t_1;l_1)dt_1 + \int\limits_0^t w(x,t,t_1;l_1)M(t_1)dt_1, \tag{30}$$

где $l_1(t) = l(t)/l_0$, непрерывные по совокупности переменных функции (функционалы) удовлетворяют следующим условиям

$$u_0(x,0,l_0;l_1) = u_0(x),\ u_{0t}(x,0,l_0;l_1) = 0,\ u_1(x,0,l_0;l_1) = 0,\ u_{1t}(x,0,l_0;l_1) = \dot{u}_0(x),$$

$$w^*(x,t,t;l_1) = f(x,t),\ w(x,t,t;l_1) = b + l(t) - x.$$

Предложены эффективные алгоритмы построения указанных функций.

Представление (29)-(30) позволяет свести решение задач 1-4 оптимального управления поведением решений (25)-(28) к проблеме моментов. Условия перевода решения (25)-(28) из начального фазового состояния в конечное в заданный момент времени T позволяют на основании (29)-(30) построить систему функций (функционалов) $Q_j(T,t;l_1)\quad j = 1,2,...$, образующих базис Рисса в их замкнутой линейной оболочке в пространстве $L_2(0,T)$. Это позволяет свести решение задач 1, 3 к решению следующих проблем моментов в пространствах $L_2(0,T),\quad L_1(0,T)$ соответственно.

Определить функционал вида (17), удовлетворяющий условиям

$$F_2(Q_j(T,t;l_1) = \alpha_j(T;l_1), \quad j = 1,2,...$$

и имеющий минимальную норму $\|F_2\|_{min} = m_2(T)$.

Определить функционал вида (21), удовлетворяющий условиям

$$F_1(Q_j(T,t;l_1) = \alpha_j(T;l_1), \quad j = 1,2,...$$

и имеющий минимальную норму $\|F_1\|_{min} = m_1(T)$.

Решения указанных проблем моментов находятся согласно методике главы 2. Для функций $m_1(T)$ и $m_2(T)$ справедливы свойства (20), (24). Решения задач 2, 4 для начально-краевой задачи (25) - (28) определяются в соответствии с (19) - (23).

В заключительной главе диссертации рассматривается решение задач 1-4 для начально-краевой задачи (1)-(5).

Уравнение (2) может быть рассмотрено автономно в предположении, что $\dot{\theta}(t)$ - известная, принадлежащая пространству $W_2^1(0,T)$ функция. Используя результаты главы 2, находим однозначные решения задач 1, 3, которые определяются в виде нелинейных непрерывных относительно $\dot{\theta}^2$ функционалов

$$F_{\dot{\theta}}(t) = F(t;\dot{\theta}^2), \quad l(t) = l(t,\dot{\theta}^2), \quad \dot{l}(t) = l_t(t;\dot{\theta}^2). \tag{31}$$

Решение задач 2, 4 в дополнении к (31) дается нелинейным и непрерывным функционалом $T_{\dot{\theta}} = T(\dot{\theta}^2)$.

Сначала рассмотрен случай бесконечно жесткого стержня. В этом случае начально-краевая задача вырождается в систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$J(l)\ddot{\theta} + 2\dot{l}\dot{\theta}(b + l - 1/2) = M(t), \tag{32}$$

$$\ddot{l} - \dot{\theta}(b + l - 1/2) = F(t) \tag{33}$$

с начальными и конечными условиями

$$\theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0, l(0) = l_0, \dot{l}(0) = \dot{l}_0, \theta(T) = \theta_T, \dot{\theta}(T) = \dot{\theta_T}, l(T) = l_T, \dot{l}(T) = \dot{l}_T. \tag{34}$$

Показано, что оптимальные траектории могут быть найдены с помощью итерационного процесса

$$\dot{l}_n(t) = \dot{l}_0 + \int\limits_0^t \left[\dot{\theta}^2_{n-1}(\tau)(b + l_{n-1}(\tau) - 1/2) + F_n(\tau)\right] d\tau,$$

$$l_n(t) = l_0 + \dot{l}_0 t + \int\limits_0^t (t-\tau)\left[\dot{\theta}^2_{n-1}(\tau)(b + l_n(\tau) - 1/2) + F_n(\tau)\right] d\tau,$$

$$\dot{\theta}_n(t) = \dot{\theta}_0 + \int\limits_0^t J^{-1}(l_n(\tau))\left[-2\dot{l}_{n-1}(\tau)\dot{\theta}_{n-1}(\tau)(b + l_{n-1}(\tau) - 1/2) + M_n(\tau)\right] d\tau,$$

$$\theta_n(t) = \theta_0 + \dot{\theta}_0 t + \int\limits_0^t (t-\tau) J^{-1}(l_n(\tau))\left[-2\dot{l}_{n-1}(\tau)\dot{\theta}_{n-1}(\tau)(b + l_{n-1}(\tau) - 1/2) + M_n(\tau)\right] d\tau,$$

$$l_0(t) \equiv 0, \ \theta_0(t) \equiv 0, \ J(l_n(\tau)) = J + 1/3 + [b + l_n(\tau)](b + l_n(\tau) - 1).$$

При этом $F_n(t)$ и $M_n(t)$ находятся как решения соответствующих проблем моментов в пространствах $L_2(0,T)$ и $L_1(0,T)$ при ограничениях

$$\alpha_1^{(n)}(T) \equiv \dot{l}_T - \dot{l}_0 - \int\limits_0^T \dot{\theta}_{n-1}(\tau)(b + l_{n-1}(\tau) - 1/2)d\tau = \int\limits_0^T F_n(\tau)d\tau,$$

$$\alpha_2^{(n)}(T) \equiv l_T - l_0 - \dot{l}_0 T - \int\limits_0^T (T-\tau)\dot{\theta}^2_{n-1}(\tau)(b + l_{n-1}(\tau) - 1/2)d\tau = \int\limits_0^T (T-\tau)F_n(\tau)d\tau,$$

$$\alpha_3^{(n)}(T) \equiv \dot{\theta}_T - \dot{\theta}_0 + 2\int\limits_0^T J^{-1}(l(\tau))\dot{l}_{n-1}(\tau)\dot{\theta}_{n-1}(\tau)(b + l(\tau) - 1/2)d\tau = \int\limits_0^T J^{-1}(l_n(\tau))M_n(\tau)d\tau,$$

$$\alpha_4^{(n)}(T) \equiv \theta_T - \theta_0 T - \dot{l}_0\theta_0 + 2\int\limits_0^T (T-\tau)J^{-1}(l_{n-1}(\tau))\dot{l}_t(\tau)\dot{\theta}_{n-1}(\tau)(b + l(\tau) - 1/2)d\tau =$$

$$= \int\limits_0^T (T-\tau)J^{-1}(l_n(\tau))M_n(\tau)d\tau.$$

Показана сходимость итерационных процессов.

Решения задач 2, 4 для (32)-(34) находятся по следующей схеме. Для заданного $T > 0$ определяются оптимальные $F^*(t)$ и $M^*(t)$. Вычисляются значения $\Phi_1(F^*(t), M^*(t))$, $\Phi_2(F^*(t), M^*(t))$. Из свойств проблемы моментов следует, что $\lim\limits_{T\to 0}\Phi_j(F^*(t), M^*(t)) \to \infty$, $\lim\limits_{t\to\infty}\Phi_j(F^*(t), M^*(t)) \to 0, \quad (j = 1, 2)$. Находим минимальное T^*, для которого $\Phi_1(F^*(t), M^*(t)) = P_2 \quad (\Phi_2(F^*(t), M^*(t)) = P_1)$. Указанное T^* и определяет решение задачи быстродействия.

В случае конечной жесткой руки манипулятора поведение механической системы определяется решениями начально-краевой задачей (1)-(5). Решение задач 1-4 построения оптимальных управлений поведением решений начально-краевой задачи (1)-(5) строится с использованием результатов главы 3 применительно к следующему итерационному процессу

$$J(l^{(k+1)})\ddot{\theta}^{(k+1)} - \int\limits_0^{l^{(k+1)}} (b + l - x_1)u_{tt}^{(k+1)}(x_1, t)dx_1 + 2\dot{l}^{(k+1)}\dot{\theta}^{(k)}(b + l^{(k+1)} - 1/2) = M^{(k+1)}(t),$$

$$u_{tt}^{(k+1)} + u_{xxxx}^{(k+1)} = (b + l^{(k+1)} - x)\ddot{\theta}^{(k+1)} + 2\dot{\theta}^{(k)}\dot{l}^{(k+1)},$$

$$u_{xx}^{(k+1)}(0, t) = u_{xxx}^{(k+1)}(0, t) = 0,\ u_x^{(k+1)}(l^{(k+1)}, t) = u^{(k+1)}(l^{(k+1)}, t) = 0,$$

$$\theta^{(k+1)}(0) = \theta_0,\ \dot{\theta}^{(k+1)}(0) = \dot{\theta}_0,\ u^{(k+1)}(x, 0) = u_0(x),\ u_t^{(k+1)}(x, 0) = \dot{u}_0(x),$$

$$l^{(k+1)}(t) = l(t, (\dot{\theta}^{(k)}(t))^2), \quad \dot{\theta}^{(0)}(t) \equiv 0, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Показана сходимость итерационных процессов, определяющих решения задач 1-4. Применение указанных методов демонстрируется на конкретных примерах.

В **приложении** приведены ключевые фрагменты текста программы, используемой для расчета оптимальных управлений.

В **заключении** подводятся общие итоги исследований, проводимых в диссертации. Упоминаются основные идеи и методы, которые использовались при решении рассматриваемых в диссертации задач. Приводятся результаты работы, которые состоят в следующем:

1. Для начально-краевой задачи (1)-(5) решены задачи оптимального управления, связанные с переводом решений из начального фазового состояния в конечное в заданный момент времени T при минимальном значении нормы управляющих функций в пространствах $L_2(0, T)$ и $L_\infty(0, T)$, а также задачи быстродействия при условии ограниченности этих норм, разработаны алгоритмы построения соответствующих оптимальных управлений.

2. Показана сходимость итерационных процессов, используемых для построения оптимальных управлений с помощью проблемы моментов.

3. Для конкретных примеров продемонстрирована эффективность предложенных в диссертации подходов построения оптимальных управлений. Разработан программный комплекс построения оптимальных управлений, который прошел государственную регистрацию.

Публикации автора по теме диссертации

Публикации из перечня ведущих рецензируемых научных журналов, рекомендованных ВАК

1. Тряхов, М. С. Построение обобщенного решения одной начально-краевой задачи с переменной границей / М.С. Тряхов // Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского — 2012. — №5(2). — С. 219-221.

2. Тряхов, М. С. Оптимальное управление поведением решений одной начально-краевой задачи с переменной границей / М. С. Тряхов // Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского — 2013. — №1(3). — С. 161-165.

3. Кубышкин, Е. П. Алгоритм построения оптимального управления поведением решений начально-краевой задачи, моделирующей динамику телескопического манипулятора. / Е. П. Кубышкин, М. С. Тряхов // Моделирование и анализ информационных систем. — 2014. — Т. 21 № 1. — С. 125-127.

4. Кубышкин, Е. П. Оптимальное управление поведением решений начально-краевой задачи, моделирующей вращение твердого тела с упругим стержнем /Е. П. Кубышкин, М. С. Тряхов // Моделирование и анализ информационных систем. — 2014. — Т.21, №5. — С. 72-92.

Работы, опубликованные в иных изданиях

5. Кубышкин, Е. П. Оптимальное управление поведением решений одной начально-краевой задачи, моделирующей динамику руки телескопического манипулятора / Е. П. Кубышкин, М. С. Тряхов // Воронежская зимняя математическая школа «Современные методы теории функций и смежные проблемы», —ВГУ, Воронеж — 2013. — С. 128-129.

6. Кубышкин, Е. П. Оптимальное управление поведением решений начально-краевой задачи, моделирующей динамику руки телескопического манипулятора / Е. П. Кубышкин, М. С. Тряхов // Международная конференция «Нелинейная динамика и ее приложения, посвященная столетию со дня рождения Поля Пенлеве (1863-1933)» — ЯрГУ, Ярославль — 2013. — С. 25-27.

7. Tryakhov, M. S. Optimal equation of initial-boundary task solutions behavior, modelling solid with flexible rod rotation / M. S. Tryakhov // International Conference. Nonlinear Methods in Physics and Mechanics. Munich, Germany. — 2013 —pp. 276-278

8. Кубышкин Е. П. Алгоритм построения оптимального управления поведением решений начально-краевой задачи, моделирующей динамику руки телескопического манипулятора / Е. П. Кубышкин, М. С. Тряхов // Тезисы семинара «Нелинейная динамика и ее приложения» — Ярославль —2013 —С. 130-132.

9. Тряхов, М. С. Оптимальное управление поведением решений начально-краевой задачи, моделирующей динамику руки телескопического манипулятора./ М. С. Тряхов // Путь в науку. Математика: Материалы II Международной молодежной научно-практической конференции —Ярославль — 2014. — С. 37-39.

10. Tryakhov, M. S. Optimal control of initial-boundary task behavior, modelling solid with flexible rod rotation / M. S. Tryakhov // International Conference. Nonlinear Methods in Physics and Mechanics. —Yaroslavl. October 3-6, 2015. —pp. 87-90.

11. Кубышкин, Е. П. Программный комплекс расчета оптимальных управлений движениями руки телескопического манипулятора / Е. П. Кубышкин, М. С. Тряхов // Свидетельство государственной регистрации программы для ЭВМ. — № 2015617666. —Дата регистрации в реестре программ для ЭВМ 17 июля 2015.

Подписано в печать 07.10.15. Формат 60x84/16.

Тираж 100 экз. Заказ 19/15.

Отдел оперативной полиграфии ЯрГУ

150000, Ярославль, ул. Советская, 14.