

Отзыв на диссертацию

Никольской Ольги Владимировны

**«ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЦИКЛАХ
НА РАССЛОЕННОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ
СЕМЕЙСТВ КЗ ПОВЕРХНОСТЕЙ»,**

представленную на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Более девяноста лет назад С.Лэфшец доказал, что (в современной терминологии) каждый класс целочисленных двумерных когомологий неособой комплексной проективной поверхности, представленный формой типа $(1,1)$, соответствует дивизору (т.е. целочисленной комбинации кривых) на поверхности. Вскоре стало ясно, что аналогичный результат справедлив для дивизоров на неособых комплексных проективных многообразиях произвольной размерности. Основываясь на развитой им в тридцатые годы двадцатого века теории, в докладе на Международном конгрессе математиков в Кэмбридже (США) в 1950 году У.Ходж выдвинул гипотезу, обобщающую результат для дивизоров на циклы произвольной коразмерности. Согласно гипотезе Ходжа, каждый рациональный класс когомологий типа (p,p) на неособом комплексном проективном многообразии соответствует алгебраическому циклу (комплексной) коразмерности p . Несмотря на колоссальные усилия, за исключением некоторых частных случаев, до сих пор не известно, справедлива ли гипотеза Ходжа, однако выяснилось, что большинство её естественных обобщений (в том числе на

целочисленные когомолии) неверны. Гипотеза Ходжа считается одной из главных нерешённых проблем математики; достаточно сказать, что её включили в число семи «проблем тысячелетия», за решение которых обещана премия в миллион долларов.

Примерно в одно время с гипотезой Ходжа А.Вейль сформулировал свои гипотезы о дзета-функции многообразий над конечными полями, обобщающие, в том числе, знаменитую гипотезу Римана (ещё одну «проблему тысячелетия»), положив тем самым начало новой эре взаимодействия между алгебраической геометрией, топологией и теорией чисел. В 1963 году Дж.Тэйт представил свою гипотезу, представляющую, в известном смысле, аналог гипотезы Ходжа для многообразий над числовыми полями, а в конце шестидесятых годов А.Гротендик сформулировал знаменитые *стандартные гипотезы*, о когомологиях неособых проективных многообразий. Гротендик показал, что гипотезы Вейля вытекают из стандартных гипотез, но П.Делинь, доказавший гипотезу Вейля-Римана в 1974 году, пошёл другим путём, а стандартные гипотезы в общем случае до сих пор остаются не доказанными.

Перечисленные выше исторические факты подчёркивают актуальность темы, выбранной диссертантом и её научным руководителем. Речь идёт о решении, пусть в частных, но важных случаях, известнейших и труднейших проблем современной математики.

В первой главе диссертации приводятся необходимые предварительные сведения из смежных разделов математики. Эта глава позволяет читателю-неспециалисту быстро войти в курс дела, не пользуясь дополнительными источниками. Такой формат позволяет также неспешно ввести необходимые обозначения. Новых результатов эта глава не содержит.

Вторая глава занимает центральное место в диссертации. В этой главе получены основные результаты (теоремы 1 и 2), а именно, при некоторых дополнительных предположениях, гипотеза Ходжа и стандартная гипотеза Гротендика В (типа Лефшеца) доказываются для пятимерных многообразий, являющихся расслоенным произведением двух неизотривиальных семейств КЗ поверхностей над неособой проективной кривой.

В третьей главе гипотеза Ходжа и стандартная гипотеза типа Лефшеца В для расслоенного произведения X двух неизотривиальных семейств КЗ поверхностей над неособой проективной кривой C доказываются при несколько иных предположениях, чем во второй главе (теоремы 3-5); в частности, накладываются ограничения на кольцо $\text{End}_{\text{Hg}(X_s)} \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_s)^{\perp}$, где NS - группа Нерона-Севери, а s - общая точка C .

Результаты второй и третьей глав являются новыми и занимают достойное место в ряду других примеров справедливости указанных выше гипотез. КЗ поверхности – один из наиболее интересных классов поверхностей, а изучение алгебраических циклов коразмерности два на расслоенном произведении представляет интерес, в частности, в связи с исследованием семейств соответствий между слоями.

Соискатель приводит исчерпывающие доказательства всех формулируемых результатов, используя при этом разнообразную технику. Стоит отметить, что проведённое соискателем исследование представления группы Ходжа, основывающееся на результатах Ю.Зархина и Г.Мустафина, приводит к необходимости дополнительных предположений в условиях теорем, составляющих содержание второй и третьей глав.

Результаты диссертации не только оригинальны, но и находятся на переднем крае развития науки. Гипотеза Ходжа и стандартные гипотезы Гротендика относятся к наиболее интригующим нерешённым проблемам математики, и поэтому каждое продвижение к их решению представляет большую ценность. Могу добавить, что в своё время я слышал от академика И.Р.Шафаревича, что он надеется, что возможно построить контрпример к гипотезе Ходжа, исходя из произведений КЗ поверхностей и их деформаций. Соискатель показывает, что, при определённых дополнительных предположениях, такой пример построить нельзя. Тем более важным представляется, чтобы диссертант продолжил работу в этом направлении, устранив, по возможности, несущественные ограничения в формулировках своих теорем.

Диссертация написано предельно чётко, даже скрупулёзно. Удивительно, но мне показалось, что даже опечатки в ней практически отсутствуют (я заметил только две опечатки в ссылке на статью Гротендика на стр. 100 диссертации (два раза скопированной на стр. 4 автореферата) и опечатку в 7-ой строке на стр. 17 автореферата). Иногда неправильно переносятся формулы (как на стр. 3 диссертации) или неудачно обозначается отображение (как на стр. 3 автореферата). В сносках в автореферате по многу раз повторяются ссылки на одни и те же работы, причём конкретные страницы не указываются; впрочем, интересующийся читатель может обратиться к диссертации. Некоторые обозначения в автореферате используются, но не вводятся, напр. Z на стр. 13 и затем 16; впрочем, в диссертации они разъясняются. И ещё маленькое замечание: автор систематически использует глагол «суть» в единственном числе третьего лица; на мой взгляд, его следует употреблять исключительно во множественном числе. Все приведённые замечания относятся к малозначительным

погрешностям оформления и никак не влияют на общую высокую оценку диссертации.

В диссертации решены важные задачи алгебраической геометрии и теории комплексных многообразий, играющие также роль в теории чисел. Основные результаты своевременно опубликованы. Автореферат правильно отражает содержание работы.

Считаю, что данная диссертация удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел, а её автор Никольская Ольга Владимировна заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук.

Официальный оппонент
Доктор физ.-мат. наук
ведущий научный сотрудник
ФГБУН «Центральный
экономико-математический
институт Российской академии
наук (ЦЭМИ РАН)»

Зак Федор Лазаревич

117418, г. Москва,
Нахимовский проспект, 47

fyodorz@gmail.com

28.11.14



Подпись Ф.Л.Зака удостоверяю
Учёный секретарь ЦЭМИ РАН

к.э.н. Ставчиков А.И.