

На правах рукописи

Матвеев Владимир Алексеевич

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЭЙЛЕРОВЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ И
НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

специальность 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Ярославль — 2015

Работа выполнена на кафедре компьютерной алгебры и теории чисел в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского».

Научный руководитель:

доктор технических наук,
профессор
Кузнецов Валентин Николаевич

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор, ФГБОУ ВПО «Тульский
государственный педагогический универ-
ситет им. Л. Н. Толстого»,
заведующий кафедрой алгебры, математи-
ческого анализа и геометрии
**Добровольский Николай Михайло-
вич**

доктор физико-математических наук,
профессор, ФГБОУ ВПО «Московский
педагогический государственный универ-
ситет»,
заведующий кафедрой теории чисел
Чирский Владимир Григорьевич

Ведущая организация:

ФГБОУ ВПО «Владимирский государ-
ственный университет имени А. Г. и Н. Г.
Столетовых»

Защита диссертации состоится «25» декабря 2015 г. в 14⁰⁰ часов на заседании диссертационного совета Д 212.002.03 при ФГБОУ ВПО «Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова» по адресу: 150008, г. Ярославль, ул. Союзная, д. 144, ауд. 426.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова по адресу: 150003, Полушкина роща, д. 1 и на официальном сайте ФГБОУ ВПО «Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова» <http://www.rd.uniyar.ac.ru>.

Автореферат разослан «__» _____ 2015 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета:



Яблокова Светлана Ивановна

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Диссертационная работа посвящена исследованиям, связанным с решением ряда задач теории L -функции Дирихле числовых полей. В основе этих исследований лежит изучение аналитических свойств определённых классов эйлеровых произведений.

Цель данной работы заключается в решении следующих **задач**:

1. Изучить аналитические свойства эйлеровых произведений вида

$$f(s) = \prod_{\wp} \left(1 - \frac{\chi(\wp)}{N(\wp)^s}\right)^{-1}, \quad s = \sigma + it, \quad (1)$$

где χ — конечнозначный характер, заданный на полугруппе целых идеалов числового поля \mathbb{K} ($[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] < \infty$), имеющий ограниченную сумматорную функцию $S(x) = \sum_{N\mathfrak{a} \leq x} \chi(\mathfrak{a})$; $N\mathfrak{a}$ — норма идеала \mathfrak{a} ; произведение берётся по всем простым идеалам поля \mathbb{K} .

Замечание 1. В работе показано существование конечнозначных характеров χ , отличных от нуля почти для всех простых идеалов \wp , сумматорная функция которых удовлетворяет условию

$$S(x) = \alpha x + O(1).$$

Такие характеры получили название *обобщённых характеров числовых полей*: главных, если $\alpha \neq 0$, и неглавных в противном случае

2. Определить условия, при которых имеет место оценка вида

$$S_t(x) = \sum_{N(\mathfrak{a}) \leq x} \chi(\mathfrak{a})(N\mathfrak{a})^{it} = O(1), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

где χ — неглавный обобщённый характер поля \mathbb{K} .

3. Доказать аналог гипотезы Н. Г. Чудакова для главных обобщённых характеров числовых полей.

Замечание 2. В случае обобщённых числовых характеров известная гипотеза Н. Г. Чудакова^{1,2} предполагает, что такие характеры являются характерами Дирихле. Аналогичное предположение высказывается

¹ Чудаков Н. Об одном классе вполне мультипликативных функций. // Н. Чудаков, Ю. В. Линник // ДАН СССР. — 1950. — т. 74, № 2. — с. 193—196.

² Чудаков Н. Г. Об обобщённом характере / Н. Г. Чудаков, К. А. Родосский // ДАН СССР. — 1950. — т. 74, № 4. — с. 1137—1138.

в работе для обобщённых характеров числовых полей. Это предположение получило название аналога гипотезы Н. Г. Чудакова.

4. Разработать новые подходы и получить новые результаты, связанные с решением известных задач относительно расположения и плотности распределения нулей L -функций Дирихле числовых полей.

Что касается первой задачи, то нужно отметить, что в работе³ изучались аналитические свойства рядов Дирихле с обобщёнными числовыми характеристиками. При этом были получены результаты, подобные тем, что были получены в данной диссертации.

Но в нашем случае методы решения соответствующих вопросов в случае числовых полей потребовали значительной доработки. Так, например, одним из основных методов исследования аналитических свойств рядов Дирихле является метод редукции к степенным рядам. Основные положения этого метода были разработаны в работах В. Н. Кузнецова^{4, 5, 6}. Суть этого метода заключается в изучении взаимосвязи между аналитическими свойствами рядов Дирихле и граничным поведением соответствующих (с теми же коэффициентами) степенных рядов. В случае обобщённых числовых характеров коэффициенты рядов Дирихле являются конечнозначными и мультипликативными, что существенно при изучении граничных свойств таких рядов. В случае обобщённых характеров числовых полей этот факт не имеет места, и поэтому метод редукции к степенным рядам требует значительной доработки.

Задачей оценок сумматорных функций вида (2) в случае числовых характеров занимались Н. Г. Чудаков и Б. М. Бредихин. В 1956 году в работе⁷ они доказали ограниченность сумматорных функций вида (2) для числовых характеров Дирихле. Нужно сказать, что методы работы⁷ полностью отличаются от методов получения оценок вида (2) в данной работе.

Относительно аналога гипотезы Н. Г. Чудакова нужно сказать следующее. В 1950 году^{8, 9} Н. Г. Чудаков выдвинул предположение о том, что обобщён-

³ *Матвеева О. А.* Аналитические свойства определённых классов рядов Дирихле и некоторые задачи теории L -функций Дирихле: Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук / Матвеева О. А. — Ульяновск : УлГУ, 2014. — 110 с.

⁴ *Кузнецов В. Н.* Об аналитическом продолжении одного класса рядов Дирихле / В. Н. Кузнецов // Выч. методы и программирование: Межвуз. сб. науч. тр. — Саратов, 1987. — т. 1. — с. 13—23.

⁵ *Кузнецов В. Н.* О граничных свойствах степенных рядов с конечнозначными коэффициентами / В. Н. Кузнецов // Диф. уравнения и теория функций: Межвуз. сб. науч. тр. — Саратов, 1987. — т. 7. — с. 8—16.

⁶ *Кузнецов В. Н.* Аналог теоремы Сеге для одного класса рядов Дирихле / В. Н. Кузнецов // Мат. заметки. — 1984. — т. 36, № 6. — с. 805—812.

⁷ *Чудаков Н. Г.* Применение равенства Парсеваля для оценок сумматорных функций характеров числовых полугрупп / Н. Г. Чудаков, Б. М. Бредихин // УМН. — 1956. — т. 8. — с. 347—360.

⁸ *Чудаков Н.* Об одном классе вполне мультипликативных функций. / Н. Чудаков, Ю. В. Линник // ДАН СССР. — 1950. — т. 74, № 2. — с. 193—196.

⁹ *Чудаков Н. Г.* Об обобщённом характере / Н. Г. Чудаков, К. А. Родосский // ДАН СССР. — 1950. —

ный числовой характер является характером Дирихле. Доказательством этого утверждения Н. Г. Чудаков и его ученики занимались ранее и занимаются по настоящее время. В 1964 году было получено доказательство гипотезы для главных обобщённых характеров¹⁰ элементарными методами.

В 2014 году в работе¹¹ было получено доказательство гипотезы для главных обобщённых характеров аналитическими методами. В этом же году в одной из работ автора впервые был сформулирован аналог гипотезы Н. Г. Чудакова для обобщённых характеров числовых полей.

В данной работе приведено аналитическое доказательство этой гипотезы для главных обобщённых характеров числовых полей. В основе этого доказательства лежат результаты относительно аналитических свойств эйлеровых произведений (1). Это доказательство отличается от доказательства подобного результата работы¹¹ применением более совершенных аналитических методов.

Вопросы, связанные с нулями L -функций Дирихле числовых полей привлекают внимание многих математиков. В данной работе изучались вопросы, подобные тем, которые рассматривались в работе¹¹ в случае классических L -функций Дирихле, т.е. L -функций с числовыми характерами Дирихле.

Совершенствование методов работы¹¹, а также разработка новых подходов и методов, характерных только для характеров числовых полей, позволили автору получить ряд новых результатов, связанных с нулями L -функций Дирихле числовых полей.

Таким образом, исследования диссертационной работы направлены на то, чтобы получить новые результаты в теории L -функций Дирихле числовых полей, аналогичные тем, которые имеют место в теории классических L -функций Дирихле. Исследования такого плана всегда были **актуальными**.

Объектом исследования в диссертации являются эйлеровы произведения, характеры числовых полей, L -функции Дирихле числовых полей, степенные ряды.

Предметом исследования являются аналитические свойства отдельных классов рядов Дирихле, асимптотическое поведение сумматорных функций, граничное поведение степенных рядов, нули L -функций Дирихле числовых полей.

Методы исследования. В работе используется метод редукции к степенным рядам, методы аналитической и алгебраической теории чисел, методы теории функций комплексного переменного, методы теории приближений.

Научная новизна. К новым результатам, полученным в данной работе

т. 74, № 4. — с. 1137—1138.

¹⁰ Глазков В. В. Характеры мультипликативной полугруппы натуральных чисел / В. В. Глазков // Исследования по теории чисел: Межвуз. сб. науч. тр. — Саратов, 1968. — т. 2. — с. 3—40.

¹¹ Матвеева О. А. Аналитические свойства определённых классов рядов Дирихле и некоторые задачи теории L -функций Дирихле: Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук / Матвеева О. А. — Ульяновск : УлГУ, 2014. — 110 с.

в направлении решения вышеприведённых задач, нужно отнести следующие результаты.

1. Показано, что для числовой последовательности a_n , имеющей ограниченную сумматорную функцию $\sum_{n \leq x} a_n$, для которой ряд Дирихле

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S(n)}{n^s}, \quad s = \sigma + it,$$

где $S(n) = \sum_{k \leq n} a_k$, определяет функцию, непрерывную на оси $\sigma = 1$, то для любого отрезка $[t_1, t_2]$ и для любого $t \in [t_1, t_2]$ имеет место оценка вида

$$S_t(x) = \sum_{n \leq x} a_n n^{it} = O(1),$$

где константа в оценке зависит только от t_1 и t_2 . Основные положения доказательства этого результаты опубликованы в работе автора.¹²

2. Доказано существование обобщённых характеров числовых полей. Этот результат опубликован в работе автора¹³.
3. Показано, что функция $f(s)$, определённая эйлеровым произведением

$$f(s) = \prod_{\wp} \left(1 - \frac{\chi(\wp)}{(N\wp)^s} \right)^{-1}, \quad s = \sigma + it,$$

где χ — обобщённый характер числового поля, аналитически продолжается в полуплоскость $\sigma > 0$ и в любом прямоугольнике $D_T : 0 < \sigma \leq 1, 2 \leq t \leq T$ ($-T \leq t \leq 2$) является голоморфной функцией, ограниченной константой, зависящей только от T . Более того, эта функция голоморфна на интервале $\sigma = 0, t \geq 2$ ($t \leq -2$). Этот результат опубликован в работе автора¹³.

4. Доказан аналог гипотезы Н. Г. Чудакова для главных обобщённых характеров числовых полей. Этот результат опубликован в работе автора¹³.

¹²Матвеев В. А. О поведении в критической полосе рядов Дирихле с конечнозначными мультипликативными коэффициентами и с ограниченной сумматорной функцией / В. А. Матвеев, О. А. Матвеева // Чебышевский сборник. — Тула, 2012. — т. 13, вып. 2. — с. 106–116.

¹³Матвеев В. А. Обобщённые характеры числовых полей и аналог гипотезы Н. Г. Чудакова / В. А. Матвеев, О. А. Матвеева // Известия Сарат. ун-та. Новая серия. Математ. Механика. Информат. — Саратов, 2015. — т. 15, вып. 1. — с. 36–45.

5. Доказан эквивалент расширенной гипотезы Римана, а именно, доказано, что расширенная гипотеза Римана для L -функций с неглавными характерами Дирихле χ числовых полей эквивалентна тому, что для каждого такого характера имеет место оценка

$$\sum_{N_{\varphi} \leq x} \chi(\varphi) = O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),$$

где ε — произвольное малое положительное число. Этот результат опубликован в работе автора¹⁴.

6. Получены аппроксимационные теоремы, отражающие скорость приближения L -функций Дирихле числовых полей в критической полосе полиномами Дирихле. Этот результат опубликован в работе автора¹⁵.
7. Разработан новый подход получения плотностных теорем для нулей L -функций Дирихле числовых полей. На основании этого подхода для числа $N(T)$ нулей L -функции Дирихле, лежащих в прямоугольнике $D_T : 0 < \sigma < 1, |t| < T$, имеет место оценка

$$N(T) = O\left(\frac{mT \ln T}{\pi}\right),$$

где число m определяется характером χ . В случае разложения L -функции Дирихле числового поля \mathbb{K} в произведение классических L -функций Дирихле доказан более точный результат:

$$N(T) = \frac{nT \ln T}{\pi} + O(T),$$

где $n = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$. Эти результаты опубликованы в работе автора¹⁶.

¹⁴Матвеева О. А. Об одном эквиваленте расширенной гипотезы Римана для L -функций Дирихле числовых полей / О. А. Матвеева, В. А. Матвеев // Известия Саратов. ун-та. Новая серия. Серия Математ. Механика. Информат. — Саратов, 2013. — т. 13, вып. 4. — с. 76—80.

¹⁵Кузнецов В. Н. К задаче численного определения нетривиальных нулей L -функций Дирихле числовых полей / В. Н. Кузнецов, В. А. Матвеев // Чебышевский сборник. — Тула, 2015. — т. 16, вып. 2. — с. 144—155.

¹⁶Матвеев В. А. Об одном подходе получения плотностных теорем для нулей L -функций Дирихле числовых полей / В. А. Матвеев, О. А. Матвеева // Материалы XIII Международной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова «Алгебра, теория чисел: современные проблемы и приложения». — Тула, 2015. — с. 234—235.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Результат об оценках сумм вида

$$S_t(x) = \sum_{N(\mathfrak{a}) \leq x} \chi(\mathfrak{a}) N(\mathfrak{a})^{it} = O(1),$$

где χ — неглавный обобщённый характер числового поля.

2. Результат об аналитических свойствах эйлеровых произведений

$$f(s) = \prod_{\wp} \left(1 - \frac{\chi(\wp)}{(N\wp)^s} \right)^{-1}, \quad s = \sigma + it,$$

где χ — обобщённый характер числового поля.

3. Доказательство аналога гипотезы Н. Г. Чудакова для главных обобщённых характеров числовых полей.
4. Теорема об одном эквивалентне расширенной гипотезы Римана для L -функций Дирихле числовых полей.
5. Результаты, связанные с разработкой численного определения нетривиальных нулей L -функций Дирихле числовых полей.
6. Результаты, связанные с получением плотностных теорем для нулей L -функций Дирихле числовых полей.

Теоретическая и практическая значимость работы

Диссертационная работа в основном носит теоретический характер. Методы и результаты работы могут быть полезны специалистам, работающим в области аналитической и алгебраической теории чисел. Результаты работы могут быть использованы и в учебном процессе при чтении специальных курсов для студентов и аспирантов вузов страны, специализирующихся в области алгебры и теории чисел.

Достоверность результатов, полученных в данной работе, обеспечивается строгими теоретическими выкладками и доказательствами, опирающимися на методы аналитической теории чисел и методы функций комплексного переменного.

Апробация работы. Основные результаты диссертации обсуждались в процессе выступлений на следующих семинарах и конференциях: научные семинары на кафедре алгебры и теории чисел СГУ (2012–2015 гг.), научные конференции на механико-математическом факультете СГУ (2012–2015 гг.), XI международная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения» (Саратов, 2013), XII международная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения» (Тула, 2014), XIII международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения» (Тула, 2015).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 14 работах, из которых 4 работы опубликованы в журналах, входящих в список ВАК РФ. Список статей приведён в конце автореферата.

Личный вклад автора. Решение поставленных задач, доказательство теорем, приведённых в диссертационной работе, анализ результатов и выводы из них получены автором самостоятельно.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы. Список литературы содержит 47 наименований. Общий объём диссертации 92 страницы.

Краткое содержание работы

Во введении приводятся постановка задач, краткий обзор результатов, полученных ранее и связанных с тематикой диссертационной работы, и излагаются основные результаты, полученные автором в направлении поставленных задач.

В первой главе диссертации изучаются аналитические свойства эйлеровых произведений вида (1) с обобщёнными характеристиками числовых полей. Получено условие, при котором сумматорная функция вида (2) является ограниченной функцией.

В этом направлении получены следующие результаты

Во-первых, доказано существование обобщённых характеров числовых полей (теорема 1.4). Далее, получены следующие утверждения.

Теорема 1.5. Пусть χ — неглавный обобщённый характер числового поля \mathbb{K} . Тогда, если ряд Дирихле

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S(n)}{n^s}, \quad s = \sigma + it,$$

где $S(n) = \sum_{N\mathfrak{a} \leq n} \chi(\mathfrak{a})$, определяет функцию, непрерывную на оси $\sigma = 1$, то для любого отрезка $[t_1, t_2]$ и любого $t \in [t_1, t_2]$

$$S_t(x) = \sum_{N\mathfrak{a} \leq x} \chi(\mathfrak{a})(N\mathfrak{a})^{it} = O(1),$$

где константа в оценке зависит только от t_1 и t_2 .

Теорема 1.6. Пусть χ — обобщённый характер числового поля \mathbb{K} . Тогда степенной ряд

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - \alpha)x^n,$$

где $a_n = \sum_{N\mathfrak{a}=n} \chi(\mathfrak{a})$, $S(x) = \sum_{N\mathfrak{a}} \chi(\mathfrak{a}) = \alpha x + O(1)$, имеет конечный предел вида

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} g(x).$$

Теорема 1.7. Пусть χ — обобщённый характер числового поля \mathbb{K} . Тогда эйлерово произведение

$$f(s) = \prod_{\wp} \left(1 - \frac{\chi(\wp)}{(N\wp)^s} \right)^{-1}, \quad s = \sigma + it \quad (3)$$

определяет функцию, голоморфную в полуплоскости $\sigma > 0$, за исключением точки $s = 1$, где она имеет простой полюс первого порядка в случае главного обобщённого характера, и ограниченную в любой области $0 < \sigma < 1$, $2 < t < T$ ($-T < t < -2$) константой, зависящей только от величины T .

Теорема 1.8. При условии теоремы 1.7 эйлерово произведение (3) определяет функцию, голоморфную на оси $\sigma = 0$ в точках $s = it$, где $|t| \geq 2$.

Вторая глава диссертации посвящена доказательству аналога гипотезы Н. Г. Чудакова в случае главных обобщённых характеров числовых полей. Основным результатом этой главы является доказательство следующего утверждения.

Теорема 2.1. *Главный обобщённый характер числового поля \mathbb{K} является характером Дирихле этого поля.*

Отметим, что существенным моментом при доказательстве этой теоремы является результат теоремы 1.7.

В конце этой главы обсуждаются вопросы, связанные с доказательством аналога гипотезы Н. Г. Чудакова для неглавных обобщённых характеров числовых полей.

В **третьей главе** получены результаты, связанные с нулями L -функций Дирихле числовых полей. В первую очередь, рассматриваются вопросы, связанные с расширенной гипотезой Римана.

В начале главы указан достаточно широкий класс L -функций Дирихле, для которого расширенная гипотеза Римана является следствием соответствующей гипотезы для классических L -функций Дирихле. Это класс L -функций Дирихле с норменными характерами, т.е. такими характерами χ , для которых существуют соответствующие числовые характеры Дирихле χ_1 , что для любого простого идеала \wp

$$\chi(\wp) = \chi_1(N\wp).$$

Далее, доказан эквивалент расширенной гипотезы Римана.

Теорема 3.1. *Нетривиальные нули L -функции Дирихле числового поля $L(s, \chi, \mathbb{K})$, где χ — неглавный характер, тогда и только тогда лежат на критической прямой, когда имеет место оценка вида*

$$\sum_{N\wp} \chi(\wp) = O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),$$

где ε — произвольное положительное число.

Отметим, что в работе¹⁷ доказано подобное утверждение для неглавных числовых характеров Дирихле. В отличие от работы¹⁷ при доказательстве теоремы 3.1 пришлось решить ряд вопросов, характерных только для характеров числовых полей.

Во втором разделе этой главы изучается аппроксимационный подход в задаче определения нетривиальных нулей L -функций Дирихле, заключающийся в построении последовательности полиномов Дирихле, нули которых, начиная с некоторого места, совпадают в прямоугольнике $D_T : 0 < \sigma_0 \leq \sigma \leq 1, |t| \leq T$ с нулями L -функции.

В этом направлении в работе получены следующие результаты.

Отметим, что в классическом случае этот подход изучался в работе¹⁷. Там был указан простой алгоритм построения таких полиномов Дирихле $Q_n(s)$. Было показано, что для прямоугольника D_T нули полинома $Q_n(s)$ при $n =$

¹⁷Матвеева О. А. Аналитические свойства определённых классов рядов Дирихле и некоторые задачи теории L -функций Дирихле: Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук / Матвеева О. А. — Ульяновск : УлГУ, 2014. — 110 с.

$[2T] + 1$ с учётом кратности совпадают с нулями L -функции.

В нашем случае в этом направлении получены следующие результаты.

Теорема 3.2. *Существует последовательность полиномов Дирихле $Q_n(s)$, сходящихся в любом прямоугольнике $D_T : 0 < \sigma_0 \leq \sigma \leq 1, |t| \leq T$ к L -функции Дирихле $L(s, \chi, \mathbb{K})$ со скоростью более высокой, чем любая степенная функция, т.е.*

$$\|L(s, \chi, \mathbb{K}) - Q_n(s)\|_{C(D_T)} = o\left(\frac{1}{n^m}\right)$$

при любом положительном m .

В случае L -функций Дирихле с норменными характерами доказаны

Теорема 3.3. *Пусть χ — неглавный норменный характер Дирихле числового поля \mathbb{K} . Тогда существует последовательность полиномов Дирихле $Q_{n^m}(s)$, где $m = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$, таких, что для любого прямоугольника $D_T : 0 < \sigma_0 \leq \sigma \leq 1, |t| \leq T$ имеет место оценка вида*

$$\|L(s, \chi, \mathbb{K}) - Q_{n^m}(s)\|_{C(D_T)} = O\left(\frac{1}{\rho^n}\right),$$

где $\rho > 1$.

Теорема 3.5. *При условиях теоремы 3.3 нули полинома Дирихле $Q_{n^m}(s)$ в прямоугольнике D_T при $n = [2T] + 1$ совпадают с учётом кратности с нулями L -функции Дирихле.*

Приведённые в работе результаты численного эксперимента позволяют только высказать предположение, что утверждение теоремы 3.4 будет иметь место для произвольных характеров Дирихле.

В четвёртом разделе этой главы рассматриваются различные подходы получения плотностных теорем для нулей L -функций Дирихле числовых полей.

В случае норменных характеров аппроксимационный подход позволяет доказать следующий результат.

Теорема 3.6. *Для числа $N(T)$ нулей L -функции Дирихле $L(s, \chi, \mathbb{K})$, где χ — неглавный норменный характер, лежащих в прямоугольнике $D_T : 0 < \sigma_0 \leq \sigma \leq 1, |t| \leq T$, имеет место асимптотическое формула*

$$N(T) = \frac{kT \ln T}{\pi} + O(T),$$

где $k = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$.

В случае произвольного характера аппроксимационный подход не позволяет получить ожидаемые результаты. В этом случае в работе предлагается иной подход, в основе которого лежат глубокие результаты алгебраической теории чисел.

Пусть $L \supset \mathbb{K}$ — такое абелево расширение поля \mathbb{K} минимальной степени, что характер Дирихле χ поля \mathbb{K} согласован с характером $\widehat{\chi}$ группы Галуа этого расширения, т.е.

$$\chi(\wp) = \widehat{\chi}(F[\wp]),$$

где $F[\wp]$ — автоморфизм Фробёниуса для идеала \wp при расширении $\mathbb{K} \subset L$.

Как следует из теории полей классов¹⁸, такое расширение существует. Пусть $r = [L : \mathbb{Q}]$. При данных обозначениях имеет место

Теорема 3.7. *Для числа $N(T)$ нулей L -функции Дирихле $L(s, \chi, \mathbb{K})$, лежащих в прямоугольнике $D_T : 0 < \sigma_0 \leq \sigma \leq 1, |t| \leq T$, имеет место оценка*

$$N(T) = O\left(\frac{rT \ln T}{\pi}\right).$$

Замечание. Желательно в теореме 3.7 получить оценку

$$N(T) = O\left(\frac{mT \ln T}{\pi}\right),$$

где $m = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$.

В **заключении** обсуждаются вопросы, которые представляют научный интерес и которые не вошли в рамки исследований данной диссертационной работы.

Основные результаты и выводы

В диссертационной работе получены результаты, отражающие асимптотические свойства L -функций Дирихле числовых полей. Соответствующие задачи рассматривались ранее другими авторами в теории классических L -функций Дирихле, т.е. L -функций с числовыми характерами. Решение подобных вопросов в случае произвольных числовых полей требует разработки новых подходов и методов. К основным результатам, полученным в данной работе, нужно отнести следующие.

1. Показано существование характеров χ числовых полей, для которых выполняются свойства, аналогичные свойствам обобщённых числовых характеров, и которые названы в работе обобщёнными характерами числовых полей. Для таких характеров получены оценки сумматорных функций вида

$$S_t(x) = \sum_{\mathfrak{a}, N\mathfrak{a} \leq x} \chi(\mathfrak{a}) N(\mathfrak{a})^{it}.$$

¹⁸Хассе Г. История теории полей классов / Г. Хассе // Алгебраическая теория чисел / под ред. Д. Касселса, А. Фрёлиха. — М. : Мир, 1969. — с. 397–417.

2. Высказано предположение, аналогичное известной гипотезе Н. Г. Чудакова относительно обобщённых числовых характеров. Приведено доказательство высказанного предположения в случае главных обобщённых характеров.
3. Получен новый эквивалент расширенной гипотезы Римана для нулей L -функций числовых полей.
4. Изучен аппроксимационный подход в задаче определения нулей L -функций Дирихле числовых полей.
5. Предложен новый подход получения плотностных теорем для нулей L -функций числовых полей.

Таким образом, в диссертационной работе получен ряд результатов, имеющих важное значение в теории L -функций Дирихле числовых полей. Все эти результаты получены лично автором и опубликованы в рецензируемых научных изданиях.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в изданиях, входящих в список ВАК

1. *Матвеев В. А.* Об одном эквиваленте расширенной гипотезы Римана для L -функций Дирихле числовых полей / О. А. Матвеева, В. А. Матвеев // Известия Саратов. ун-та. Новая серия. Серия Математ. Механика. Информат. — Саратов, 2013. — Т. 13, вып. 4. — С. 76—80.
2. *Матвеев В. А.* К оценке одного класса сумматорных функций / В. А. Матвеев // Известия Саратов. ун-та. Новая серия. Серия Математ. Механика. Информат. — Саратов, 2013. — Т. 13, вып. 4. — С. 72—76.
3. *Матвеев В. А.* Обобщённые характеры числовых полей и аналог гипотезы Н. Г. Чудакова / В. А. Матвеев, О. А. Матвеева // Известия Саратов. ун-та. Новая серия. Математ. Механика. Информат. — Саратов, 2015. — Т. 15, вып. 1. — С. 36—45.
4. *Матвеев В. А.* К задаче численного определения нетривиальных нулей L -функций Дирихле числовых полей / В. Н. Кузнецов, В. А. Матвеев // Чебышевский сборник. — Тула, 2015. — Т. 16, вып. 2. — С. 144—155.

Публикации в прочих изданиях

5. *Матвеев В. А.* О поведении в критической полосе рядов Дирихле с конечнозначными мультипликативными коэффициентами и с ограниченной сумматорной функцией / В. А. Матвеев, О. А. Матвеева // Чебышевский сборник. — Тула, 2012. — Т. 13, вып. 2. — С. 106—116.

6. *Матвеев В. А.* О поведении рядов Дирихле с обобщёнными характеристиками на оси сходимости / В. А. Матвеев // Исследования по алгебре, теории чисел, функц. анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. науч. тр. — Саратов, 2012. — Вып. 7. — С. 68—72.
7. *Матвеев В. А.* Об одном эквиваленте расширенной гипотезы Римана / О. А. Матвеева, В. А. Матвеев // Материалы I внутривузовской конференции студентов и аспирантов. — Саратов, 2013. — С. 146—152.
8. *Матвеев В. А.* К оценке одной сумматорной функции / В. А. Матвеев // Тезисы докладов на XI Международной конференции «Алгебра, теория чисел: современные проблемы и приложения». — Саратов, 2013. — С. 59.
9. *Матвеев В. А.* О нулях рядов Дирихле с «испорченными» на редком множестве характеристиками Дирихле / В. А. Матвеев, О. А. Матвеева // Тезисы докладов на XI Международной конференции «Алгебра, теория чисел: современные проблемы и приложения». — Саратов, 2013. — С. 59—60.
10. *Матвеев В. А.* О нулях L-функций числовых полей / В. А. Матвеев, О. А. Матвеева // Тезисы докладов на XI Международной конференции «Алгебра, теория чисел: современные проблемы и приложения». — Саратов, 2013. — С. 60.
11. *Матвеев В. А.* Обобщённые характеры числовых полей и аналитические свойства эйлеровых произведений с такими характеристиками / В. Н. Кузнецов, В. А. Матвеев, О. А. Матвеева // Материалы XII Международной конференции «Алгебра, теория чисел: современные проблемы и приложения». — Тула, 2014. — С. 235—236.
12. *Матвеев В. А.* Аналитические свойства одного класса рядов Дирихле с мультипликативными конечнозначными коэффициентами / В. А. Матвеев, О. А. Матвеева // Материалы XII Международной конференции «Алгебра, теория чисел: современные проблемы и приложения». — Тула, 2014. — С. 240.
13. *Матвеев В. А.* Об одном численном алгоритме определения нулей L-функций Дирихле числовых полей / В. А. Матвеев // Материалы XIII Международной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова «Алгебра, теория чисел: современные проблемы и приложения». — Тула, 2015. — С. 233—234.

14. *Матвеев В. А.* Об одном подходе получения плотностных теорем для нулей L-функций Дирихле числовых полей / В. А. Матвеев, О. А. Матвеева // Материалы XIII Международной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова «Алгебра, теория чисел: современные проблемы и приложения». — Тула, 2015. — С. 234—235.