

ОТЗЫВ

на диссертацию **Никольской Ольги Владимировны**

«Об алгебраических циклах на расслоенном произведении

семейств $K3$ поверхностей»,

представленной на соискание ученой степени кандидата

физико - математических наук.

Специальность **01.01.06** - математическая логика, алгебра и теория чисел.

Стандартная гипотеза Гротендика (типа Лефшеца) об алгебраичности оператора Ходжа "звездочка", а также знаменитые гипотезы Ходжа и Тэйта, характеризующие алгебраические классы когомологий на гладких проективных многообразиях, являются наиболее интересными гипотезами современной алгебраической геометрии.

Гипотеза Ходжа утверждает, что рациональные классы когомологий на комплексном проективном многообразии, представленные гармоническими формами типа (p,p) , являются классами алгебраических циклов (конечных формальных линейных комбинаций замкнутых алгебраических подмногообразий коразмерности p с коэффициентами из поля рациональных чисел). Она относится к числу труднейших гипотез геометрии и доказана в очень ограниченном числе случаев, в основном для абелевых многообразий (например, она верна для всех простых абелевых многообразий простой размерности, но остается недоказанной даже для произведения двух произвольных $K3$ поверхностей). По теореме Лефшеца о дивизорах эта гипотеза верна в случае $p=1$.

Стандартная гипотеза Гротендика влечет совпадение численной и гомологической эквивалентностей алгебраических циклов и алгебраичность компонент Кюннета класса диагонали. Она верна для комплексных кривых, поверхностей, абелевых многообразий, 3-мерных многообразий неосновного типа, а также для некоторых 4-мерных эллиптических многообразий и компактификаций абелевых схем относительной размерности 3 над аффинной

кривой при условии, что слои минимальной модели Нерона над бесконечно удаленными точками являются линейными торами (т.е. имеют мультипликативный тип).

Актуальность темы следует из сказанного выше.

Гипотеза Ходжа и стандартная гипотеза Гротендика доказаны в диссертации для 5-мерного расслоенного произведения двух проективных неизотривиальных семейств КЗ поверхностей (возможно, с вырождениями) над гладкой проективной кривой при слабых ограничениях на локусы вырождений и ранги групп Нерона – Севери общих геометрических слоев.

В первой главе диссертации даны основные определения и сформулированы некоторые известные результаты теории алгебр Ли, гомотопической топологии, теории структур Ходжа, в том числе дано определение группы Ходжа КЗ поверхности.

Во второй главе диссертации содержатся доказательства основных теорем 1 и 2. Предполагая, что семейства КЗ поверхностей вырождаются над непересекающимися подмножествами базы, и ранг группы Нерона – Севери общего геометрического слоя первого семейства КЗ поверхностей – нечетное число, отличное от ранга для другого семейства, соискатель доказывает гипотезу Ходжа для гладкого расслоенного произведения семейств. Если оба семейства не имеют вырожденных слоев и ранги трансцендентных частей 2-мерных рациональных когомологий общих геометрических слоев семейств КЗ поверхностей являются различными нечетными простыми числами, то для расслоенного произведения доказывается стандартная гипотеза Гротендика.

Третья глава диссертации содержит доказательства теорем 3 – 5, являющихся обобщениями результатов второй главы и связанных с гипотезой Ходжа (при некоторых ограничениях на действия групп Ходжа в трансцендентных частях 2-мерных когомологий общих геометрических слоев).

Используемая в диссертации методика доказательств теорем об алгебраических циклах является оригинальной, технически сложной и опирается на следующие теории:

- 1) Современная теория структур Ходжа, построенная в работах П.Делиня,

С.Цуккера.

- 2) Теория циклов, построенная А.Гротендиком и его учениками, в том числе результаты, относящиеся к стандартной гипотезе в знаменитой работе С.Клеймана "Алгебраические циклы и гипотезы Вейля".
- 3) Фундаментальная работа Ю.Г.Зархина о структуре группы Ходжа $K3$ поверхности. Согласно этой работе, полупростая часть алгебры Ли группы Ходжа, рассматриваемая над полем комплексных чисел, является прямой суммой классических алгебр Ли.
- 4) Теорема П.Делиня о замыкании группы глобальной монодромии, согласно которой можно считать, что это замыкание содержится в группе Ходжа общего геометрического слоя в качестве нормальной подгруппы.
- 5) Результаты п.п. 3), 4) и лемма Г.А.Мустафина дают возможность при выполнении условий основных теорем заменить представления монодромии представлениями групп Ходжа и вычислить алгебраическую часть четномерных рациональных когомологий, т.е. проверить гипотезу Ходжа.
- 6) Работы С.Г.Танкеева о стандартной гипотезе для 3-мерных и 4-мерных многообразий.

Полученные в диссертации результаты являются новыми научными знаниями. Продемонстрирован оригинальный метод вычислений на 5-мерных многообразиях, который может оказаться полезным при решении других задач алгебраической геометрии.

Диссертация является законченным научным исследованием и выполнена соискателем самостоятельно на высоком научном уровне. Текст написан очень ясно. В первых параграфах диссертации даются полные определения всех используемых понятий и излагаются вспомогательные факты, на которые опирается дальнейшее изложение, что облегчает изучение диссертации. Всем результатам диссертации даны подробные доказательства, достоверность которых не вызывает сомнений. Основные результаты диссертации содержатся в трех работах, опубликованных в журналах, рекомендованных ВАК. Эти результаты докладывались также на 5 Международных конференциях.

Автореферат адекватно и достаточно полно отражает содержание диссертации.

Следует отметить тщательность подготовки текста диссертации, в котором оппонент не смог обнаружить ни одной опечатки.

Материалы диссертации могут быть использованы в исследованиях по алгебраической геометрии, ведущихся, например, в МИРАН и ПОМИРАН. Их целесообразно также включить в спецкурсы, читаемые в МГУ и СПбГУ.

Из недостатков диссертации стоит отметить, что в целях полноты картины следовало бы во введении к диссертации написать несколько строк об истории гипотезы Ходжа, так как значительная часть диссертации посвящена доказательству именно этой гипотезы. Это замечание не умаляет высокой оценки выполненной работы.

Считаю, что диссертация написана на высоком научном уровне, соответствует всем требованиям ВАК Минобрнауки России, а соискатель Никольская Ольга Владимировна заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

27.11.14

Официальный оппонент, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института информационных технологий Национального исследовательского центра "Курчатовский институт" (123182, Москва, пл. Академика Курчатова, д. 1)

шифр специальности 01.01.06,

электронный адрес: helltiara@mail.ru

Кузьмин Кузьмин Леонид Викторович

Подпись Кузьмина Л.В. заверяю:

Заместитель директора по научной работе - главный ученый секретарь
НИЦ "Курчатовский институт" Ильгисонис Виктор Игоревич

