

## Отзыв

официального оппонента на диссертационную работу Кащенко Александры Андреевны «Устойчивость одного класса автомодельных решений в сингулярно возмущенных распределенных системах», представленную на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

В течение последних десятилетий и в мире, и в России активно исследуются нелинейные распределенные системы. Они представляют большой теоретический и прикладной интерес. Всё большее число современных технологий используют нелинейные эффекты, обнаруженные и изученные для модельных нелинейных уравнений. В этой активно развивающейся области широкое использование вычислительного эксперимента дополняется асимптотическим анализом. Последний особенно важен, когда рассматриваются сингулярно возмущенные нелинейные уравнения, прямой численный анализ которых выходит за пределы возможностей современных вычислительных систем.

Ряд фундаментальных работ в области асимптотического анализа сингулярно возмущенных уравнений, получивших признание в России и за рубежом, был выполнен в научной школе в области математической физики, сложившейся в Ярославском государственном университете им. П.Г. Демидова, под руководством профессора С.А. Кащенко. Работа А.А. Кащенко представляет собой продолжение и развитие этого обширного цикла исследований.

Начиная с XIX века, одним из эффективных и весьма популярных методов исследования нелинейных систем является построение их автомодельных решений. Для их построения достаточно решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений, что гораздо проще, чем анализировать исходное нелинейное уравнение в частных производных или уравнение с запаздыванием. Автомодельные решения полезны тем, что в ряде случаев позволяют прояснить сущность описываемых явлений, и тем, что могут быть использованы в качестве тестов при численном анализе, особенно если имеется информация об их устойчивости. Устойчивости автомодельных решений посвящена диссертационная работа А.А. Кащенко. Её тема представляется, безусловно, важной и актуальной.

В диссертации рассматривается устойчивость простейших бегущих волн, в которых решение зависит от времени и пространства экспоненциально, и переменные разделяются. Физики, построив математическую мо-

дель изучаемых процессов, традиционно начинают с поиска и анализа именно таких решений.

Однако использование современных асимптотических методов и аппарата теории устойчивости позволяет сделать «то, что можно, так как нужно» и довести результаты автомодельного анализа до уровня теорем.

В первой главе диссертации рассматривается набор бегущих волн с постоянной амплитудой для зависящего от времени обобщенного зависящего от времени уравнения Гинзбурга–Ландау (ОЗВ УГЛ), называемого для краткости в отечественной литературе уравнением Курамото–Цузуки (УКЦ), так как именно эти исследователи начали рассматривать и использовать его как квазинормальную форму (в терминологии С.А. Кащенко) для широкого класса систем реакция-диффузия.

Для этого уравнения используется стандартный линейный анализ (устойчивость по первому приближению) и проводится искуственное кропотливое исследование возникающих квазиполиномов с учётом того, что коэффициент при диффузионном члене мал. При этом особенно интересны здесь теоремы 3 и 4, из которых следует, что в изучаемом уравнении может одновременно существовать множество устойчивых бегущих волн. При этом с уменьшением малого параметра их число растёт. Этот результат можно было предвидеть, однако его строгое обоснование важно. В этой связи возникает интересный вопрос, – на какое же из устойчивых решений будет выходить возмущение достаточно общего вида, и как будет зависеть продолжительность переходного периода от малого параметра  $\varepsilon$ .

По-видимому, одна из наиболее сложных и интересных задач, рассмотренных и в этой главе, и в диссертации в целом, связана с анализом простейших гармонических решений уравнения Стюарта-Ландау с большим запаздыванием.

Именно здесь автором проявлена высокая математическая культура, настойчивость, выполнен огромный объем работы. Полученные результаты представляются очень интересными.

Параметры автомодельных решений принадлежат некоторому эллипсу в пространстве  $(\rho, \omega)$ , где  $\rho$  характеризует амплитуду автомодельных решений, а  $\omega$  – их частоту. В этом случае в результате кропотливого анализа удалось установить, что области устойчивости при различных значениях параметров могут быть расположены достаточно причудливо (см. рис. 11-14). В данной задаче, так же, как и в предыдущей, рассмотренной в данной главе, имеет место гипермультистабильность (при различных значениях параметров на упоминавшемся эллипсе может быть выделено несколько областей устойчивости и неустойчивости), то есть можно добиться существования сколь угодно большого числа устойчивых решений. Это представляется и интересным, и необычным, в контексте традиционных результатов асимптотического анализа.

Вторая глава диссертационной работы А.А. Кащенко посвящена математическим моделям лазерной динамики с большим запаздыванием. Эти модели представляют собой системы нелинейных уравнений, связывающих амплитуду электромагнитной волны для одной из мод лазерного излучения и динамику инверсной населенности. В частности, рассматривается модель лазера с синхронизацией мод в частном диапазоне (FDML), предложенная А.Г. Владимировым и модель Лэнга–Кобаяши. Используя ту же методологию, удалось для первой модели построить кривую, характеризующую параметры возможных автомодельных решений в пространстве характеризующих их параметров и выделить на ней области устойчивости и неустойчивости. В частности, оказалось, что для рассматриваемой системы уравнений может быть до трех областей устойчивости. В одном частном случае удалось доказать, что необходимые и достаточные условия устойчивости совпадают.

Похожие результаты получены и для модели полупроводникового лазера Лэнга–Кобаяши. В частности, построена кривая в пространстве параметров, определяющих характеристики исследуемых автомодельных решений, а также областей на ней, соответствующие семействам устойчивых и неустойчивых решений.

Подводя итог, можно сказать, что выполнена большая, добротная, интересная научная работа, отвечающая всем требованиям, предъявленным ВАК РФ к кандидатским диссертациям по данной специальности. Полученные результаты представляются достоверными, новыми и оригинальными. Квалификация автора работы не вызывает сомнений. А.А. Кащенко является сложившимся специалистом и, безусловно, заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Работа очень хорошая, поэтому не делал бы каких-либо замечаний, но считаю полезным высказать несколько пожеланий, которые могут оказаться полезными А.А. Кащенко, которая, вероятно, будет и дальше разрабатывать тематику, которой посвящена обсуждаемая диссертация.

Работа и автореферат написаны ясно, чётко, аккуратно – вложен – большой труд, поэтому полезно было бы убрать стилистические погрешности, такие как «распределенное уравнение», «ноль областей устойчивости» и т.д.

Работа технически достаточно сложная, поэтому, на мой взгляд, и в автореферате, и в статьях крайне желательно приводить рисунки соответствующих кривых в пространстве параметров решения и помечать на них области устойчивости и неустойчивости. Жаль, что в автореферате это сделано не было.

В контексте этой диссертации и многих других работ возникает общий математический вопрос. Понятие корректности по Адамару подразу-

мекает единственность решения поставленной задачи. В приведенном асимптотическом исследовании мы имеем огромное пространство автомодельных решений. Естественно, в реальной ситуации, которые должны были бы описывать изученные модели, должен существовать некоторый механизм «отбора» решений, адекватных описываемой реальности. В теории дифракции, в частности, эту роль выполняют условия изучения. Такая «асимптотическая неопределенность» вызывает много вопросов и открывает простор для разных интерпретаций. Например, академик В.П. Маслов видит в подобном асимптотическом поведении корни гидродинамической и иной турбулентности, при которых система «перескакивает» с одних решений на другие при больших числах Рейнольдса. Не прояснив этот общий вопрос, мы не вполне понимаем смысл и значение многих конкретных результатов.

Ещё одно пожелание связано с прояснением физической сущности полученных результатов. Поскольку речь идет о задачах математической физики они должны иметь отношение к некоторой конкретной, прикладной или теоретической физике. В Ярославском регионе, в частности, и в России, в целом, есть множество коллективов, занимающихся на высоком уровне экспериментальными приложениями нелинейной динамики и лазерной физики. Хотелось бы пожелать поскорее наладить с ними творческое сотрудничество. Возможно, найденные А.А. Кащенко устойчивые автомодельные решения важны и интересны для них.

Заведующий отделом моделирования нелинейных процессов ФГБУН  
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,  
д.ф.-м.н., профессор

 / Г.Г. Малинецкий /

Адрес: 125047 Москва, Миусская пл., д.4

E-mail: [GMalin@Keldysh.ru](mailto:GMalin@Keldysh.ru)

Тел.: (903)627-34-16

Сайт организации: <http://keldysh.ru>

Подпись Георгия Геннадьевича Малинецкого удостоверяю,  
Учёный секретарь ИПМ им. М.В. Келдыша РАН  
к.ф.-м.н.



А.И. Маслов /

03 ноября 2015 г.