

На правах рукописи

Туманова Елена Александровна

**АППРОКСИМИРУЕМОСТЬ КОРНЕВЫМИ КЛАССАМИ
СВОБОДНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ГРУПП**

Специальность 01.01.06 —
математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ярославль – 2014

Диссертационная работа выполнена на кафедре алгебры и математической логики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Ивановский государственный университет»

Научный руководитель:

Молдаванский Давид Ионович,
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты:

Глухов Михаил Михайлович,
доктор физико-математических наук, профессор, академик-секретарь отделения математических проблем криптографии ФГКНУ «Академия криптографии Российской Федерации»

Добрынина Ирина Васильевна,
доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры алгебры, математического анализа и геометрии ФГБОУ ВПО «Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого»

Ведущая организация:

ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»

Защита состоится 26 декабря 2014 года в 14:00 на заседании диссертационного совета Д 212.002.03 при ФГБОУ ВПО «Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова» по адресу: 150008, г. Ярославль, ул. Союзная, д. 144, ауд. 426.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВПО «Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова» (150003, г. Ярославль, ул. Полушкина роща, 1а), а также на сайте ФГБОУ ВПО «Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова»:
<http://www.rd.uniyar.ac.ru/upload/iblock/eff/dissertatsiya.pdf>.

Автореферат разослан «_____» _____ 2014 года

Ученый секретарь
диссертационного совета

Яблокова
Светлана Ивановна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. В современной теории групп значительное место занимают свободные конструкции групп, а именно, свободные произведения, обобщенные свободные произведения (т. е. свободные произведения с объединенными подгруппами) и HNN-расширения. Изучение различных свойств этих конструкций, как правило, осуществляется в рамках ветви теории групп, называемой комбинаторной теорией групп. Одно из направлений современных исследований по данной тематике заключается в рассмотрении аппроксимационных свойств свободных конструкций групп. Наиболее изученным среди таких свойств является ставшее уже классическим свойство финитной аппроксимируемости, то есть аппроксимируемости классом \mathcal{F} всех конечных групп.

Впервые понятие финитно аппроксимируемой группы появилось в работе А. И. Мальцева, опубликованной в 1940 году¹, и вскоре стало широко исследуемым не только в нашей стране, но и за рубежом. Сравнительно быстро было установлено, что обычное свободное произведение наследует от сомножителей выполнимость данного свойства². В то же время стало понятно, что ситуация с обобщенным свободным произведением, а позднее — и с HNN-расширением является более сложной: группы, построенные таким образом из финитно аппроксимируемых групп, могут не быть финитно аппроксимируемыми. Это привело к возникновению значительного числа работ, направленных на получение достаточных условий сохранения свободными конструкциями свойства финитной аппроксимируемости.

Г. Баумслаг доказал, что свободное произведение двух конечных групп с объединенными подгруппами является финитно аппроксимируемой группой³. Представленная в статье Г. Баумслага³ методика изучения финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений была перенесена на HNN-расширения Б. Баумслагом и М. Треткоффом, доказавшими также финитную аппроксимируемость HNN-расширения произвольной конечной группы⁴. Последний факт был независимо установлен Д. Коэном⁵. Эти работы стали основополагающими в исследовании аппроксимационных свойств обобщенных свободных произведений и HNN-расширений.

¹Мальцев, А. И. Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами / А. И. Мальцев // Матем. сб. — 1940. — Т. 8, № 3. — С. 405–422.

²Gruenberg, K. W. Residual properties of infinite soluble groups / K. W. Gruenberg // Proc. Lond. Math. Soc. — 1957. — V. 7. — P. 29–62.

³Baumslag, G. On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups / G. Baumslag // Trans. Amer. Math. Soc. — 1963. — V. 106. — P. 193–209.

⁴Baumslag, B. Residually finite HNN-extensions / B. Baumslag, M. Tretkoff // Comm. Algebra. — 1978. — V. 6. — P. 179–194.

⁵Cohen, D. E. Residual finiteness and Britton's lemma / D. E. Cohen // J. Lond. Math. Soc. — 1977. — V. 16. — P. 232–234.

Несмотря на то, что на данный момент уже получено большое количество результатов в указанном направлении, изучение финитной аппроксимируемости и по сей день не утратило свою актуальность, так как до сих пор имеется довольно много открытых вопросов. Поэтому и в настоящее время ученые различных стран не оставляют без внимания это свойство. Например, в 2011 году Д. Н. Азаровым и А. В. Розовым был найден критерий финитной аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух финитно аппроксимируемых разрешимых групп конечного ранга с собственными нормальными объединенными подгруппами⁶.

За время своего существования понятие финитной аппроксимируемости многократно обобщалось, расширялось и уточнялось в различных направлениях. В результате появились понятия аппроксимируемости классом \mathcal{F}_p всех конечных p -групп, где p — простое число, аппроксимируемости классом \mathcal{F}_π всех конечных π -групп, где π — непустое множество простых чисел, аппроксимируемости классом \mathcal{FS}_π всех конечных разрешимых π -групп и многие другие. Наконец, самое общее в этом направлении — понятие аппроксимируемости произвольным классом групп \mathcal{K} .

Напомним, что группа X называется аппроксимируемой классом групп \mathcal{K} , если для любого неединичного элемента $x \in X$ существует гомоморфизм σ группы X на некоторую группу из класса \mathcal{K} такой, что образ элемента x относительно гомоморфизма σ отличен от 1. Довольно часто для этого понятия используется более краткий термин — \mathcal{K} -аппроксимируемость.

В данной диссертационной работе рассмотрено свойство аппроксимируемости корневыми классами групп.

Следуя К. Грюнбергу², содержащий хотя бы одну неединичную группу класс групп \mathcal{K} будем называть корневым, если он замкнут относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей, а также удовлетворяет условию Грюнберга: если X — некоторая группа и $1 \leq Z \leq Y \leq X$ — субнормальный ряд группы X такой, что $X/Y, Y/Z \in \mathcal{K}$, то в группе X существует нормальная подгруппа T такая, что $T \subseteq Z$ и $X/T \in \mathcal{K}$.

Данное определение не позволяет легко разграничить корневые и некорневые классы групп. Характеризация корневых классов в других терминах была дана Е. В. Соколовым⁷. Он показал, что корневыми являются те и только те наследственные классы групп, которые замкнуты относительно декартовых сплетений. Что же касается корневых классов, состо-

⁶Азаров, Д. Н. О финитной аппроксимируемости свободного произведения разрешимых групп конечного ранга с нормальными объединенными подгруппами / Д. Н. Азаров, А. В. Розов // Вестн. Иван. гос. ун-та. Естеств., обществ. науки. — 2011. — Вып. 2. — С. 98–103.

⁷Sokolov, E. V. A characterization of root classes of groups / E. V. Sokolov // ArXiv. — math.GR:1308.1039.

ящих только из конечных групп, то для них известна еще более понятная и легко проверяемая характеристика: класс конечных групп является корневым тогда и только тогда, когда он замкнут относительно взятия подгрупп и расширений⁸. Имеет смысл упомянуть и тот факт, что пересечение любых двух корневых классов групп — снова корневой класс⁷.

Легко видеть, что корневыми являются многие активно изучаемые классы групп: класс всех конечных групп; периодических π -групп, где π — непустое множество простых чисел; разрешимых групп; всех групп без кручения. Отметим, что к числу их пересечений принадлежат упоминавшиеся выше классы \mathcal{F}_p , \mathcal{F}_π и $\mathcal{F}\mathcal{S}_\pi$. Поэтому свойство аппроксимируемости корневым классом обобщает такие интенсивно исследуемые свойства как финитная аппроксимируемость, аппроксимируемость конечными p -группами, аппроксимируемость разрешимыми группами, а также позволяет систематизировать и интегрировать в единое целое отдельные известные результаты теории аппроксимируемости групп.

В упомянутой выше работе² К. Грюнберг показал, что если \mathcal{K} — такой корневой класс групп, что всякая свободная группа \mathcal{K} -аппроксимируема, то свободное произведение произвольного семейства \mathcal{K} -аппроксимируемых групп \mathcal{K} -аппроксимируемо. Позднее Д. Н. Азаров и Д. Тьеджо установили аппроксимируемость каждой свободной группы любым корневым классом, тем самым распространив сформулированное К. Грюнбергом утверждение на произвольный корневой класс групп⁹.

Аппроксимируемость корневыми классами других свободных конструкций (обобщенных свободных произведений, HNN-расширений) изучалась в статьях Д. Н. Азарова и Д. В. Гольцова¹⁰, Д. Н. Азарова и автора¹¹, Д. Н. Азарова и Д. Тьеджо⁹, Д. В. Гольцова^{12,13}, Е. В. Соколо-

⁸Гольцов, Д. В. Классы групп и подгрупповые топологии / Д. В. Гольцов, Н. И. Яцкин // Вестн. Иван. гос. ун-та. Естеств., обществ. науки. — 2011. — Вып. 2. — С. 115–128.

⁹Азаров, Д. Н. Об аппроксимируемости свободного произведения групп с объединенной подгруппой корневым классом групп / Д. Н. Азаров, Д. Тьеджо // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. — 2002. — Вып. 5. — С. 6–10.

¹⁰Азаров, Д. Н. О почти аппроксимируемости обобщенных свободных произведений и HNN-расширений групп некоторыми классами конечных групп / Д. Н. Азаров, Д. В. Гольцов // Вестн. Иван. гос. ун-та. Естеств., обществ. науки. — 2012. — Вып. 2. — С. 86–91.

¹¹Азаров, Д. Н. Об аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп корневыми классами / Д. Н. Азаров, Е. А. Туманова // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. — 2008. — Вып. 6. — С. 29–42.

¹²Гольцов, Д. В. О почти аппроксимируемости корневыми классами обобщенных свободных произведений и HNN-расширений групп / Д. В. Гольцов // Чебышевский сб. — 2013. — Т. 14, вып. 3. С. 34–41.

¹³Гольцов, Д. В. Аппроксимируемость HNN-расширения с центральными связанными подгруппами корневым классом групп / Д. В. Гольцов // Молодая наука в классическом университете: тез. докл. науч. конф. фестиваля студентов, аспирантов и молодых ученых, Иваново, 21–25 апреля 2014 г.: в 7 ч. — Иваново: Изд-во «Иван. гос. ун-т», 2014. — Ч. 1. — С. 37.

ва^{7,14}, Д. Тьеджо¹⁵. Другие свойства корневых классов групп рассматривались в работах Д. В. Гольцова и Н. И. Яцкина⁸, А. С. Гудовщико-вой и Е. В. Соколова¹⁶, Е. В. Соколова^{7,17}. Во многих случаях удается показать, что некоторое свойство конкретного корневого класса групп справедливо не только для данного корневого класса, но и в более общей ситуации, а иногда и вовсе верно для всех корневых классов групп. Так, например, при изучении аппроксимируемости и отделимости корневыми классами групп утверждения, справедливые для уже привычных нам классов \mathcal{F} , \mathcal{F}_p и \mathcal{F}_π часто удается обобщить, накладывая на корневой класс лишь требование замкнутости относительно факторизации (т. е. взятия гомоморфных образов).

Степень разработанности темы исследования. Как уже было отмечено выше, вопрос об аппроксимируемости произвольным корневым классом \mathcal{K} свободного произведения \mathcal{K} -аппроксимируемых групп разрешен положительно. Что же касается более сложно устроенных свободных конструкций групп — обобщенного свободного произведения и HNN-расширения — на данный момент имеется совсем мало простых, удобных в применении достаточных условий их аппроксимируемости произвольным корневым классом групп и, тем более, критериев.

Упомянувшиеся выше утверждения о финитной аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух конечных групп и HNN-расширения произвольной конечной группы не могут быть распространены даже на свойство аппроксимируемости классом \mathcal{F}_p . Критерий \mathcal{F}_p -аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух конечных p -групп был получен Г. Хигманом¹⁸. Для \mathcal{F}_p -аппроксимируемости HNN-расширения конечной p -группы на данный момент установлено несколько критериев. Первыми такой критерий получили Е. Рэптис и Д. Варсос¹⁹.

¹⁴Соколов, Е. В. Об аппроксимируемости относительно сопряженности некоторыми классами конечных групп обобщенных свободных произведений и HNN-расширений / Е. В. Соколов // Мальцевские чтения 2013: тез. докл. междунар. науч. конф., Новосибирск, 11–15 ноября 2013 г. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 2013. — С. 100.

¹⁵Tieudjo, D. On root-class residuality of some free constructions / D. Tieudjo // JP Journal of Algebra, Number Theory and applications. — 2010. — V. 18, № 2. — P. 125–143.

¹⁶Гудовщикова, А. С. Два замечания о классе конечных разрешимых π -групп / А. С. Гудовщикова, Е. В. Соколов // Вестн. молодых ученых ИвГУ. — 2012. — Вып. 12. — С. 3–4.

¹⁷Соколов, Е. В. Об отделимости циклических подгрупп свободной группы корневым классом групп / Е. В. Соколов // Математика и ее приложения: журнал Иван. матем. общества. — 2011. — Вып. 1. — С. 101–104.

¹⁸Higman, G. Amalgams of p -groups / G. Higman // J. Algebra. — 1964. — V. 1. — P. 301–305.

¹⁹Raptis, E. The residual nilpotence of HNN-extensions with base group a finite or a f. g. abelian group / E. Raptis, D. Varsos // J. Pure Appl. Algebra. — 1991. — V. 76, № 2. — P. 167–178.

Затем Д. И. Молдаванским был найден другой критерий²⁰, который, как оказалось, является весьма удобным для исследования аппроксимационных свойств HNN-расширений с бесконечной базовой группой. Кроме того, в последнее время был получен еще один критерий \mathcal{F}_p -аппроксимруемости HNN-расширения конечной p -группы²¹.

Что же касается свойства аппроксимруемости классом \mathcal{F}_π , здесь ситуация оказывается более сложной. Общего критерия аппроксимруемости данным классом обобщенного свободного произведения двух конечных π -групп до сих пор не найдено. Аналогичным образом обстоит дело и с HNN-расширением конечной π -группы. Определенные результаты удается получить, только накладывая некоторые ограничения на свободные множители и объединяемые подгруппы (в случае обобщенного свободного произведения) или базовую группу и связанные подгруппы (в случае HNN-расширения). Так, например, Д. И. Молдаванский и А. Е. Копрова доказали, что обобщенное свободное произведение двух конечных π -групп с центральными объединенными подгруппами \mathcal{F}_π -аппроксимруемо²². Затем автором был получен критерий \mathcal{F}_π -аппроксимруемости обобщенного свободного произведения двух конечных π -групп с нормальными объединенными подгруппами [2, теорема 1], частным случаем которого является упомянутое только что утверждение.

В статье А. В. Розова²³ изучается \mathcal{F}_π -аппроксимруемость обобщенного свободного произведения двух \mathcal{F}_π -аппроксимруемых групп с центральными объединенными подгруппами. В работе Е. В. Соколова²⁴ приводятся достаточные условия \mathcal{F}_π -аппроксимруемости обобщенных свободных произведений и HNN-расширений, свободные множители и базовые группы которых являются конечно порожденными нильпотентными, а объединяемые и связанные подгруппы конечны. Кроме того, в [13] получен целый ряд результатов об \mathcal{F}_π -аппроксимруемости HNN-расширений.

²⁰Молдаванский, Д. И. Аппроксимруемость конечными p -группами HNN-расширений / Д. И. Молдаванский // Вестн. Иван. гос. ун-та. Биология, Химия, Физика, Математика. — 2000. — Вып. 3. — С. 129–140.

²¹Aschenbrenner, M. A criterion for HNN extensions of finite p -groups to be residually p / M. Aschenbrenner, S. Friedl // J. Pure Appl. Algebra. — 2011. — V. 215, № 9. — P. 2280–2289.

²²Копрова, А. Е. Об аппроксимруемости конечными группами обобщенных свободных произведений групп / А. Е. Копрова, Д. И. Молдаванский // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. — 2008. — Вып. 6. — С. 59–70.

²³Розов, А. В. Об аппроксимруемости конечными π -группами свободных произведений нильпотентных групп конечного ранга с центральными объединенными подгруппами / А. В. Розов // Ярославский пед. вестн. Естеств. науки. — 2013. — Т. 3, № 2. — С. 7–13.

²⁴Соколов, Е. В. Аппроксимруемость конечными π -группами некоторых свободных конструкций групп / Е. В. Соколов // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения. Матер. XII Междунар. конф., Тула, 21–25 апреля 2014 г. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2014. — С. 95–96.

Нет утверждений общего характера и для аппроксимируемости классом \mathcal{S} всех разрешимых групп. Определенное продвижение в изучении \mathcal{S} -аппроксимируемости обобщенных свободных произведений сделано в работах Д. Кахробаеи и С. Маджевикза^{25,26,27}. Наибольшее число результатов получено для \mathcal{S} -аппроксимируемости обобщенных свободных произведений конечно порожденных нильпотентных групп.

Переходя к более общему свойству — аппроксимируемости произвольным корневым классом, сталкиваемся с еще менее разработанной областью теории групп. В упомянутой выше статье⁹ Д. Н. Азаров и Д. Тьеджо рассматривают аппроксимируемость произвольным корневым классом групп \mathcal{K} не только обычных, но и обобщенных свободных произведений двух групп. Ими получен критерий \mathcal{K} -аппроксимируемости обобщенного свободного произведения, свободные множители которого изоморфны, а связывающий объединяемые подгруппы изоморфизм совпадает с ограничением на них изоморфизма сомножителей. При помощи доказанного в этой работе результата о \mathcal{K} -аппроксимируемости обычных свободных произведений найдено достаточное условие \mathcal{K} -аппроксимируемости произвольного обобщенного свободного произведения двух групп, но оно, к сожалению, не слишком удобно в использовании. Д. Тьеджо перечисленные результаты распространены на конструкцию свободного произведения произвольного семейства групп с одной объединенной подгруппой¹⁵. Кроме того, в его работе представлено, по-видимому, первое исследование аппроксимируемости произвольным корневым классом \mathcal{K} HNN-расширений групп. А именно, установлен критерий аппроксимируемости классом \mathcal{K} HNN-расширения \mathcal{K} -аппроксимируемой группы с совпадающими связанными подгруппами при условии, что связывающий подгруппы изоморфизм является тождественным отображением.

Позднее в работах Д. В. Гольцова¹³ и Е. В. Соколова⁷ были предприняты попытки дальнейшего исследования аппроксимируемости свободных конструкций корневыми классами групп. Д. В. Гольцовым изучается аппроксимируемость замкнутым относительно факторизации корневым классом групп HNN-расширений с тривиально пересекающимися центральными связанными подгруппами. Предметом исследования Е. В. Соколова выступают условия аппроксимируемости разрешимыми \mathcal{K} -группами обобщенных свободных произведений двух нильпотентных \mathcal{K} -групп, где \mathcal{K} — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп.

²⁵Kahrobaei, D. Doubles of residually solvable groups / D. Kahrobaei // Aspects of Infinite Group Theory. Algebra and Discrete Mathematics. — V. 1. — World Scientific, 2008.

²⁶Kahrobaei, D. On residual solvability of generalized free products of finitely generated nilpotent groups / D. Kahrobaei // Comm. Algebra. — 2011. — V. 39, Iss. 2. — P. 647–656.

²⁷Kahrobaei, D. On the residual solvability of generalized free products of solvable groups / D. Kahrobaei, S. Majewicz // DMTCS. — 2012. — V. 13, № 4. — P. 45–50.

В статьях Д. Н. Азарова и Д. В. Гольцова^{10,12} рассматривается более слабое свойство — почти аппроксимируемость корневым классом групп.

Таким образом, несмотря на значительное число опубликованных результатов об условиях аппроксимируемости свободных конструкций групп рядом конкретных корневых классов, исследования по аппроксимируемости этих конструкций произвольным корневым классом можно считать находящимися в самом начале.

Цели и задачи исследования. Целью данной диссертационной работы является исследование аппроксимируемости корневыми классами некоторых свободных конструкций групп. Для реализации сформулированной цели был поставлен, а затем решен ряд *задач*:

- исследовать аппроксимируемость корневыми классами групп обобщенных свободных произведений двух групп с нормальным объединением;
- изучить аппроксимируемость корневыми классами обобщенных свободных произведений, в которых объединенная подгруппа является ретрактом хотя бы в одном из свободных множителей;
- исследовать аппроксимируемость корневыми классами HNN-расширений групп с совпадающими связанными подгруппами.

Научная новизна. В данной диссертационной работе автором получен ряд результатов, характеризующих свойства аппроксимируемости замкнутыми относительно факторизации, а также произвольными корневыми классами групп некоторых обобщенных свободных произведений и HNN-расширений групп. Все полученные результаты являются новыми. Большинство из них представлено в разделе “Основное содержание работы” данного автореферата.

Теоретическая и практическая значимость работы. Данная диссертация носит теоретический характер. Все полученные в ней результаты, а также использованные методы исследования могут быть применены для дальнейшего изучения аппроксимационных свойств свободных конструкций групп, в частности, обобщенных свободных произведений и HNN-расширений групп.

Методология и методы исследования. В качестве основного метода исследования была выбрана методика изучения финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений двух групп, представленная в уже упоминавшейся выше работе Г. Баумслага³, которая затем была перенесена рядом ученых на исследование других аппроксимационных свойств обобщенных свободных произведений двух групп. Также была использована разработанная на ее основе Б. Баумслагом и М. Треткоффом⁴ аналогичная методика для анализа условий финитной аппроксимируемости HNN-расширений групп. Кроме того, в ходе исследова-

ния автором применялись классические приемы комбинаторной теории групп и некоторые теоремы о строении подгрупп свободных конструкций.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся основные результаты данной диссертационной работы. Все они представлены в разделе “Основное содержание работы” данного автореферата.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность результатов, выносимых на защиту, подтверждается изложенными в работе подробными доказательствами. Результаты проведенного исследования были представлены на IX Международной конференции “Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения”, посвященной восьмидесятилетию профессора М. Д. Гриндлингера (Тула: ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2012 г.), на научной конференции фестиваля студентов, аспирантов и молодых ученых “Молодая наука в классическом университете” (Иваново: ИвГУ, 2013 г.), на научных конференциях “Научно-исследовательская деятельность в классическом университете” (Иваново: ИвГУ, 2013, 2014 гг.), на международной конференции “Алгебра и математическая логика: теория и приложения” (Казань: КФУ, 2014 г.), на XII Международной конференции “Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения”, посвященной восьмидесятилетию профессора В. Н. Латышева (Тула: ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2014 г.), на семинаре по теории групп под руководством Д. И. Молдаванского (Иваново: ИвГУ, 2013, 2014 гг.).

Все основные результаты, полученные автором в ходе диссертационного исследования, опубликованы в 15 научных работах: 7 статьях, из которых 2 статьи опубликованы в журналах, принадлежащих списку ВАК; 4 тезисах докладов на международных конференциях и 4 тезисах докладов на конференциях в ИвГУ.

Структура и объем работы. Данная диссертация состоит из введения, четырех глав, в которых представлены результаты работы, и заключения. Список литературы включает 52 наименования. Общий объем работы — 101 страница печатного текста.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первой главе диссертации приводятся определения основных используемых в работе понятий, таких как аппроксимируемость, отдельность, изолированность, регулярность и квазирегулярность. Также сюда включены краткие сведения о расщепляемых расширениях, обобщенных свободных произведениях и HNN-расширениях, корневых классах групп. Основное содержание данной главы составляют доказательства ряда вспомогательных утверждений, раскрывающих некоторые свойства перечисленных понятий и конструкций.

Во второй главе данной диссертационной работы рассматриваются условия аппроксимируемости замкнутыми относительно факторизации, а также произвольными корневыми классами групп обобщенного свободного произведения двух групп, объединенные подгруппы которого являются нормальными в соответствующих свободных множителях.

Заметим, что если X — некоторая группа, Y — ее нормальная подгруппа, то ограничение на эту подгруппу любого внутреннего автоморфизма группы X оказывается автоморфизмом группы Y . Множество $\text{Aut}_X(Y)$ всех таких автоморфизмов является подгруппой группы $\text{Aut } Y$ всех автоморфизмов группы Y .

На протяжении второй главы, если не оговорено противное, предполагается, что A и B — некоторые группы, H и K — нормальные подгруппы групп A и B соответственно, φ — изоморфизм подгруппы H на подгруппу K , $G = (A * B; H = K, \varphi)$ — свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K , объединенными относительно изоморфизма φ . Условие нормальности объединенных подгрупп в соответствующих свободных множителях влечет за собой тот факт, что подгруппа H является нормальной в группе G и потому определена подгруппа $\text{Aut}_G(H)$ группы $\text{Aut } H$.

Сформулируем в этих предположениях основной результат, доказанный во второй главе диссертации.

Теорема 1. *Пусть \mathcal{K} — корневой класс групп, A и B — некоторые группы из класса \mathcal{K} . Если $A/H \in \mathcal{K}$, $B/K \in \mathcal{K}$, $\text{Aut}_G(H) \in \mathcal{K}$, то существует гомоморфизм группы G на группу из класса \mathcal{K} , инъективный на подгруппах A , B , и, в частности, группа G \mathcal{K} -аппроксимируема.*

Если класс \mathcal{K} замкнут относительно взятия фактор-групп, то теорема 1 превращается в критерий, формулируемый следующим образом.

Следствие 1. *Пусть \mathcal{K} — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, A и B — некоторые группы из класса \mathcal{K} . Тогда следующие два утверждения равносильны и при выполнении любого из них группа G \mathcal{K} -аппроксимируема.*

1. *Существует гомоморфизм группы G на группу из класса \mathcal{K} , инъективный на подгруппах A и B .*
2. *Группа $\text{Aut}_G(H)$ принадлежит классу \mathcal{K} .*

Следствие 1 обобщает следствие 2 из работы Г. Хигмана¹⁸, представляющее собой критерий аппроксимируемости конечными p -группами свободного произведения двух конечных p -групп с нормальными объединенными подгруппами, а также теорему 2 из статьи Д. Н. Азарова и автора¹¹, которая в свою очередь является обобщением упоминавшегося выше результата Д. И. Молдавского и А. Е. Копровой²² об \mathcal{F}_π -аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух конечных π -групп с центральными объединенными подгруппами.

Во всех остальных доказанных во второй главе теоремах свободные множители A и B уже необязательно принадлежат классу \mathcal{K} .

Автором найдены критерии аппроксимируемости замкнутым относительно факторизации корневым классом групп \mathcal{K} обобщенного свободного произведения двух \mathcal{K} -аппроксимируемых групп с собственными нормальными объединенными подгруппами в каждом из следующих случаев:

- 1) H — конечная группа;
- 2) $\text{Aut}_G(H)$ — конечная группа;
- 3) $\text{Aut}_G(H)$ — абелева группа;
- 4) $\text{Aut}_G(H) = \text{Aut}_A(H)$ или $\text{Aut}_G(H) = \varphi \text{Aut}_B(K)\varphi^{-1}$.

Также найдены достаточные условия аппроксимируемости замкнутым относительно факторизации корневым классом групп \mathcal{K} обобщенного свободного произведения двух групп, аппроксимируемых \mathcal{K} -группами без кручения, с нормальными объединенными подгруппами, имеющими конечный ранг Гирша-Зайцева (последнее означает, что объединенные подгруппы обладают конечными субнормальными рядами, все факторы которых являются периодическими или бесконечными циклическими группами).

В третьей главе также изучается аппроксимируемость корневыми классами обобщенных свободных произведений групп. Однако, здесь вместо нормальности на объединенные подгруппы накладывается другое условие: хотя бы одна из них должна быть ретрактом в соответствующем свободном множителе.

Напомним, что подгруппа Y группы X называется ретрактом в этой группе, если существует подгруппа Z , нормальная в X и такая, что $X = YZ$ и $Z \cap Y = 1$.

Всюду в данной главе, как и в предыдущей, предполагается, что $G = (A * B; H = K, \varphi)$ — свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K , объединенными относительно изоморфизма φ . Первым из основных результатов главы 3 является

Теорема 2. *Пусть \mathcal{K} — корневой класс групп, K — ретракт в группе B . Если группа A принадлежит классу \mathcal{K} , а группа B \mathcal{K} -аппроксимируема, то группа G \mathcal{K} -аппроксимируема.*

При помощи теоремы 2 получено достаточное условие аппроксимируемости группы G произвольным корневым классом групп \mathcal{K} (**теорема 3**), в котором группа A уже необязательно принадлежит классу \mathcal{K} . Автор установил, что теорема 3 обобщает доказанное ранее утверждение об аппроксимируемости произвольным корневым классом групп \mathcal{K} свободного произведения двух \mathcal{K} -аппроксимируемых групп с объединенными ретрактами²⁸, частными случаями которого, в свою очередь, явля-

²⁸см. 11, теорема 1.

ются результаты Дж. Болера и Б. Эванса²⁹, а также П. А. Бобровского и Е. В. Соколова³⁰.

Обобщением упомянутого только что утверждения является и сформулированная ниже теорема 4, в которой речь идет о свободном произведении произвольного семейства групп с одной объединенной подгруппой.

Теорема 4. *Пусть \mathcal{K} — корневой класс групп и P — свободное произведение групп X_λ , $\lambda \in \Lambda$, с одной объединенной подгруппой. Пусть также для любого $\lambda \in \Lambda$ объединенная подгруппа является ретрактом в X_λ и группа X_λ \mathcal{K} -аппроксимируема. Тогда объединенная подгруппа является ретрактом в P и группа P \mathcal{K} -аппроксимируема.*

Интересно отметить тот факт, что, в отличие от рассмотренной во второй главе ситуации с нормальными объединенными подгруппами, все результаты главы 3 об аппроксимируемости обобщенных свободных произведений корневым классом групп удается доказать без наложения на этот класс условия замкнутости относительно факторизации.

В четвертой главе диссертации рассматривается частный случай конструкции HNN-расширения группы с одной проходной буквой, когда связанные подгруппы совпадают. Автором получены как необходимые, так и достаточные условия аппроксимируемости HNN-расширений указанного вида замкнутыми относительно факторизации, а также произвольными корневыми классами групп.

В пределах четвертой главы имеют место следующие обозначения: B — некоторая группа, H и K — изоморфные подгруппы группы B , $\varphi: H \rightarrow K$ — некоторый изоморфизм подгрупп, $G = (B, t; t^{-1}Ht = K, \varphi)$ — HNN-расширение группы B с проходной буквой t и подгруппами H и K , связанными относительно изоморфизма φ .

Как уже было сказано выше, автором рассматривается частный случай общей конструкции HNN-расширения, когда связанные подгруппы H и K совпадают. Понятно, что изоморфизм φ при этом превращается в автоморфизм подгруппы H . Установлено также, что при данном предположении группа G представляет собой свободное произведение базовой группы B и подгруппы HNN-расширения G , порожденной связанной подгруппой H и проходной буквой t , с объединенной подгруппой H . Это замечание позволяет свести вопрос об аппроксимируемости корневым классом \mathcal{K} HNN-расширения G к рассмотренной ранее автором задаче о \mathcal{K} -аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой. Следует, однако, отметить, что,

²⁹Boler, J. The free product of residually finite groups amalgamated along retracts is residually finite / J. Boler, B. Evans // Proc. Amer. Math. Soc. — 1973. — V. 37, № 1 — P. 50–52.

³⁰Bobrovskii, P. A. The cyclic subgroup separability of certain generalized free products of two groups / P. A. Bobrovskii, E. V. Sokolov // Algebra Colloq. — 2010. — V. 17, № 4. — P. 577–582.

используя специфические свойства HNN-расширений, удастся не просто переинтерпретировать результаты предыдущих двух глав в других терминах, а упростить формулировки и усилить их так, что полученные в итоге утверждения представляют самостоятельный интерес. Сформулируем основные результаты четвертой главы.

Теорема 5. Пусть \mathcal{K} — корневой класс групп, B — \mathcal{K} -аппроксимлируемая группа, H — ретракт в группе B .

1. Если класс \mathcal{K} содержит хотя бы одну непериодическую группу, то группа G \mathcal{K} -аппроксимлируема.
2. Пусть класс \mathcal{K} состоит только из периодических групп и циклическая группа $\langle \varphi \rangle$, порожденная автоморфизмом φ , является конечной группой. Если $\langle \varphi \rangle \in \mathcal{K}$, то группа G \mathcal{K} -аппроксимлируема. Если, кроме того, класс \mathcal{K} замкнут относительно факторизации, то верно и обратное: из \mathcal{K} -аппроксимлируемости группы G следует, что $\langle \varphi \rangle \in \mathcal{K}$.

В сформулированных ниже утверждениях подгруппа H является нормальной в B . При таком условии она оказывается нормальной и в G . Это позволяет рассмотреть группу $\text{Aut}_G(H)$, которая, как легко видеть, порождается своей подгруппой $\text{Aut}_B(H)$ и автоморфизмом φ .

Теорема 6. Пусть \mathcal{K} — корневой класс групп, B — \mathcal{K} -группа, H — нормальная подгруппа группы B . Если $B/H \in \mathcal{K}$, $\text{Aut}_G(H) \in \mathcal{K}$, то существует гомоморфизм группы G на группу из класса \mathcal{K} , инъективный на подгруппе B , и, в частности, группа G \mathcal{K} -аппроксимлируема.

Если класс \mathcal{K} замкнут относительно взятия фактор-групп, то теорема 6 превращается в критерий, формулируемый следующим образом.

Следствие 2. Пусть \mathcal{K} — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, B — \mathcal{K} -группа, H — нормальная подгруппа группы B . Тогда следующие два утверждения равносильны и при выполнении любого из них группа G \mathcal{K} -аппроксимлируема.

1. Существует гомоморфизм группы G на группу из класса \mathcal{K} , инъективный на подгруппе B .
2. Группа $\text{Aut}_G(H)$ принадлежит классу \mathcal{K} .

В других доказанных в четвертой главе утверждениях группа B уже необязательно принадлежит классу \mathcal{K} , а подгруппа H все еще нормальна в B , и \mathcal{K} -аппроксимлируемость группы G исследуется при различных условиях, накладываемых на подгруппу H и группу ее автоморфизмов. Такими условиями являются абелевость группы $\text{Aut}_G(H)$, конечность группы $\text{Aut}_G(H)$, конечность подгруппы H . Рассматриваются также случаи, когда подгруппа H является бесконечной циклической или имеет конечный ранг Гирша-Зайцева. Кроме того, изучен случай, когда дополнительное условие накладывается на автоморфизм φ : он представляет со-

бой ограничение на H некоторого внутреннего автоморфизма группы B . В каждом из этих случаев найдены критерии аппроксимируемости замкнутым относительно факторизации корневым классом групп рассматриваемого HNN-расширения.

Следствие одной из доказанных в данной главе теорем обобщает результат, полученный Д. И. Молдаванским и И. А. Варламовой для групп Баумслага-Солитера³¹, (а именно, теорему 2) в части, касающейся аппроксимируемости конечными π -группами.

Отметим также, что в главах 2 и 4 доказаны утверждения, обобщающие и являющиеся в какой-то степени аналогами фильтрационных теорем Г. Баумслага (для обобщенных свободных произведений двух групп) и Б. Баумслага и М. Треткоффа (для HNN-расширений групп).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучение аппроксимационных свойств свободных конструкций групп является одним из актуальных направлений современных исследований в области комбинаторной теории групп. На данный момент наибольшее количество результатов получено для финитной аппроксимируемости. Менее изученными, но не менее интересными являются свойства аппроксимируемости классами \mathcal{S} , \mathcal{F}_p , \mathcal{F}_π и \mathcal{FS}_π . Все эти и многие другие востребованные классы групп относятся к числу корневых. Поэтому аппроксимируемость корневым классом групп обобщает такие интенсивно исследуемые свойства как финитная аппроксимируемость, аппроксимируемость конечными π -группами, аппроксимируемость разрешимыми группами, а также позволяет установить взаимосвязь между отдельными известными результатами в данной области. Поиск условий аппроксимируемости корневыми классами представляет собой важную задачу комбинаторной теории групп, что и побудило автора выбрать именно эту проблематику.

В данной диссертации сделано некоторое продвижение в исследованиях по указанной тематике. При этом, конечно, остается много открытых вопросов и интересных задач, которые еще только предстоит решить. Основным среди них безусловно является поиск критериев аппроксимируемости произвольным корневым классом \mathcal{K} обобщенного свободного произведения двух \mathcal{K} -групп и HNN-расширения \mathcal{K} -группы. Представляется, однако, маловероятным, что данную задачу удастся решить сразу в самом общем виде. Поэтому было бы хорошо сначала найти ответы на поставленные вопросы в различных частных случаях, например, для конструкций, рассматриваемых в данной работе: свободного произведения двух групп с нормальным объединением и HNN-расширения с сов-

³¹Варламова, И. А. Об аппроксимируемости конечными группами групп Баумслага-Солитера / И. А. Варламова, Д. И. Молдаванский // Вестн. Иван. гос. ун-та. Естеств., обществ. науки. — 2012. — Вып. 2. — С. 107–114.

падающими связанными подгруппами. Небезынтересно также, будет ли аппроксимироваться корневым классом \mathcal{K} обобщенное свободное произведение двух \mathcal{K} -аппроксимируемых групп, объединенная подгруппа которого является ретрактом только в одном из свободных множителей. Среди других возможных направлений исследований можно выделить изучение аппроксимируемости корневыми классами HNN-расширений с тривиально пересекающимися связанными подгруппами и отыскание критериев аппроксимируемости корневыми классами, состоящими из периодических групп, HNN-расширений с совпадающими связанными подгруппами при условии, что связывающий подгруппы изоморфизм имеет бесконечный порядок.

Таким образом, несмотря на интенсивное развитие все более универсальных понятий и конструкций, а также активные попытки усилить и обобщить полученные ранее результаты, различные частные случаи сложных для решения в общем виде задач в свою очередь не должны оставаться без внимания. Весьма вероятно, что интерес к этому научному направлению не исчезнет и будут не только найдены ответы на сформулированные выше вопросы, но и проведены другие многочисленные исследования.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК Минобрнауки России

- [1] Туманова, Е. А. Об аппроксимируемости обобщенных свободных произведений корневыми классами групп / Е. А. Туманова // Модел. и анализ информ. систем. — 2013. — Т. 20, № 1. — С. 133–137.
- [2] Туманова, Е. А. Об аппроксимируемости конечными π -группами обобщенных свободных произведений групп / Е. А. Туманова // Матем. заметки. — 2014. — Т. 95, вып. 4. — С. 605–614.

Другие публикации

- [3] Туманова, Е. А. Об аппроксимируемости конечными π -группами свободного произведения двух конечных π -групп с нормальной объединенной подгруппой / Е. А. Туманова // Молодая наука в классическом университете: тез. докл. науч. конф. фестиваля студентов, аспирантов и молодых ученых, Иваново, 20–24 апреля 2009 г.: в 8 ч. — Иваново: Изд-во «Иван. гос. ун-т», 2009. — Ч. 8. — С. 32.
- [4] Туманова, Е. А. Об аппроксимируемости конечными π -группами свободного произведения групп с нормальными объединенными подгруппами / Е. А. Туманова // Молодая наука в классическом университете: тез. докл. науч. конф. фестиваля студентов, аспирантов и молодых ученых, Иваново, 20–30 апреля 2010 г.: в 8 ч. — Иваново: Изд-во «Иван. гос. ун-т», 2010. — Ч. 8. — С. 24.

- [5] Туманова, Е. А. Об аппроксимируемости конечными группами обобщенного свободного произведения групп / Е. А. Туманова // Молодая наука в классическом университете: тез. докл. науч. конф. фестиваля студентов, аспирантов и молодых ученых, Иваново, 25–29 апреля 2011 г.: в 7 ч. — Иваново: Изд-во «Иван. гос. ун-т», 2011. — Ч. 1. — С. 105–106.
- [6] Туманова, Е. А. Об аппроксимируемости конечными группами обобщенных свободных произведений групп / Е. А. Туманова // Чебышевский сб. — 2012. — Т. 13, вып. 1. — С. 150–152.
- [7] Туманова, Е. А. Об аппроксимируемости конечными π -группами обобщенных свободных произведений с нормальным объединением / Е. А. Туманова // Математика и ее приложения: журнал Иван. матем. общества. — 2012. — Вып. 1. — С. 103–106.
- [8] Туманова, Е. А. Аппроксимируемость конечными p -группами HNN-расширений групп / Е. А. Туманова // Вестн. Иван. гос. ун-та. Естеств., обществ. науки. — 2012. — Вып. 2. — С. 139–141.
- [9] Туманова, Е. А. Некоторые достаточные условия аппроксимируемости обобщенных свободных произведений корневыми классами групп / Е. А. Туманова // Научно-исследовательская деятельность в классическом университете: ИвГУ — 2013. Сб. статей по итогам науч. конф., Иваново, 28 января–8 февраля 2013 г. — Иваново: Изд-во «Иван. гос. ун-т», 2013. — С. 9–12.
- [10] Туманова, Е. А. Об аппроксимируемости конечными π -группами обобщенных свободных произведений с нормальной объединенной подгруппой / Е. А. Туманова // Молодая наука в классическом университете: тез. докл. науч. конф. фестиваля студентов, аспирантов и молодых ученых, Иваново, 22–26 апреля 2013 г.: в 7 ч. — Иваново: Изд-во «Иван. гос. ун-т», 2013. — Ч. 1. — С. 109–110.
- [11] Туманова, Е. А. Об аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальным объединением / Е. А. Туманова // Мальцевские чтения 2013: тез. докл. междунар. науч. конф., Новосибирск, 11–15 ноября 2013 г. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 2013. — С. 102.
- [12] Туманова, Е. А. Некоторые условия аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальной объединенной подгруппой / Е. А. Туманова // Чебышевский сб. — 2013. — Т. 14, вып. 3. — С. 140–147.
- [13] Туманова, Е. А. Об аппроксимируемости конечными π -группами HNN-расширений групп / Е. А. Туманова // Вестн. Иван. гос. ун-та. Естеств., обществ. науки. — 2013. — Вып. 2. — С. 94–102.
- [14] Туманова, Е. А. Об аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальным объединением / Е. А. Туманова // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения. Матер. XII междунар. конф., Тула, 21–25 апреля

- 2014 г. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2014. — С. 97–100.
- [15] Туманова, Е. А. Об аппроксимируемости корневым классом \mathcal{K} HNN-расширения \mathcal{K} -группы / Е. А. Туманова // Алгебра и математическая логика: теория и приложения. Матер. междунар. конф., Казань, 2–6 июня 2014 г. — Казань: Изд-во КФУ, 2014. — С. 151.

Туманова Елена Александровна

**АППРОКСИМИРУЕМОСТЬ КОРНЕВЫМИ КЛАССАМИ
СВОБОДНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ГРУПП**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 10.10.2014 г.

Формат $60 \times 84 \frac{1}{16}$. Бумага писчая. Печать плоская.

Усл. печ. л. 1,4. Уч.-изд. л. 1,0. Тираж 100 экз.

Издательство «Ивановский государственный университет»

153025 Иваново, ул. Ермака, 39 (4932) 93-43-41

E-mail: publisher@ivanovo.ac.ru

