

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

им. В. А. Стеклова
Российской академии наук
(МИАН)

119991, Москва, ул. Губкина, д. 8

Тел.: (495) 984-81-41. Факс: (493) 984-81-39. Для телеграмм: Москва, 119333, математика

E-mail: steklov@mi.ras.ru http://www.mi.ras.ru

№ 11102-
На № от

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель директора Федерального государственного
бюджетного учреждения науки
«Математический институт им. В.А. Стеклова РАН»
член-корреспондент Российской академии наук



Д.В. Трещев
«02» декабря 2014 г.

ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

Федерального государственного бюджетного учреждения науки

«Математический институт им. В.А. Стеклова РАН»

на диссертационную работу

Никольской Ольги Владимировны

на тему

«Об алгебраических циклах на расслоенном
произведении семейств $K3$ поверхностей»,

представленной на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности 01.01.06 –
«математическая логика, алгебра и теория чисел»

Диссертация посвящена изучению алгебраических циклов на
алгебраических многообразиях. Данная тема восходит к работам таких

классиков науки как Абель, Якоби, Пуанкаре, Гильберт. Ее исследовали крупнейшие алгебраические геометры двадцатого столетия: Ходж, Вейль, Гротендик, Тейт. В последние десятилетия алгебраические циклы активно изучались математиками из многих математических школ и научных центров, в частности, Делинем, Бейлинсоном, Блохом, Воеводским, Вуазен и другими общепризнанными авторитетными учеными. Исследование алгебраических циклов привело к созданию теории мотивов и во многом способствовало развитию одного из важнейших разделов современной математики - алгебраической K-теории. Разработано множество нетривиальных подходов и тонких методов для работы с алгебраическими циклами, однако существующий уровень развития этой теории бесконечно далек от доказательства имеющихся в ней основных гипотез. Именно поэтому каждое новое утверждение, каждый новый нетривиальный пример являются безусловным прорывом в изучении алгебраических циклов.

Одним из наиболее глубоких открытых вопросов в теории алгебраических циклов является знаменитая гипотеза Ходжа, одна из так называемых «задач тысячелетия». Гипотеза Ходжа предсказывает существование алгебраических циклов для специальных классов в когомологиях гладких проективных комплексных многообразий. Другой открытой проблемой является стандартная гипотеза Гротендика типа Лефшеца, утверждающая алгебраичность оператора, обратного к изоморфизму Лефшеца на когомологиях гладких проективных комплексных многообразий. Эти гипотезы проверены лишь для некоторых немногочисленных классов многообразий и в данный момент не предложено ни одного подхода к их решению в общем случае.

В рассматриваемой диссертации гипотеза Ходжа доказывается для пятимерных многообразий, являющихся расслоенным произведением двух семейств K3 поверхностей над кривой, при выполнении некоторых явных условий. При этом для таких пятимерных многообразий полностью вычисляется структура Ходжа и доказывается стандартная гипотеза Гротендика

типа Лефшеца при выполнении некоторых дополнительных условий. Эти результаты являются совершенно оригинальными и представляют принципиально новые примеры многообразий, для которых проверены гипотеза Ходжа и стандартная гипотеза Гротендика типа Лефшеца.

Техническим ядром аргументов диссертации является утверждение об отсутствии ненулевых морфизмов между локальными системами, задающимися пространствами трансцендентных циклов на КЗ поверхностях из рассматриваемых семейств. Это специальное свойство доказывается при выполнении некоторых дополнительных явных условий (в общем случае оно не выполняется). Данное утверждение глубоко нетривиально и представляет собой независимый интерес для специалистов в области теории Ходжа. Для его доказательства в диссертации используется тонкая техника работы с представлением монодромии в семействах структур Ходжа, с группами Ходжа КЗ поверхностей, а также применяются методы теории представлений полупростых алгебр Ли.

Диссертация состоит из введения и трех глав, изложена на 104 страницах, список использованной литературы содержит 40 наименований. Во введении кратко изложено содержание диссертации. В первой главе подробно описываются вспомогательные понятия и сведения: полупростые алгебры Ли, структуры Ходжа, спектральная последовательность Лере, группа Ходжа КЗ поверхности, представление монодромии.

Во второй и третьей главах доказываются гипотеза Ходжа и стандартная гипотеза Гротендика типа Лефшеца для расслоенных произведений двух семейств КЗ поверхностей над кривой. Приводятся пять теорем такого типа, в которых требуются различные условия на общие слои семейств, формулируемые в терминах рангов группы Нерона-Севери и свойств эндоморфизмов структуры Ходжа трансцендентных циклов.

Все результаты диссертации снабжены подробными и полными доказательствами, корректность которых не вызывает сомнения. Автором продемонстрирован высочайший уровень владения методами фундаментальных

разделов современной алгебры и геометрии: когомологиями алгебраических многообразий, теорией Ходжа, теорией группы монодромии, теорией алгебраических групп, теорией представлений алгебр Ли.

Можно быть уверенным, что предложенный в диссертации подход к доказательству гипотезы Ходжа и стандартной гипотезы Гротендика типа Лефшеца будет использован специалистами в области алгебраической геометрии для нахождения дальнейших примеров многообразий, для которых выполнены эти гипотезы.

Из недочетов работы отметим недостаточно последовательное изложение материала. В частности, в основных теоремах по-разному формулируются одинаковые сущности, например, условие на неравенство рангов группы Нерона-Севери. Теорема 4 при условии (i) является усилением первой части теоремы 1, не требующим того, чтобы множества критических значений семейств пересекались. В теореме 5 первое условие является частным случаем второго. Кроме того, оно повторяет теорему 2 в ее части, относящейся к гипотезе Ходжа. Многие обозначения заново вводятся в начале различных параграфов диссертации. На стр. 72 вводятся обозначения p_1 и p_2 для канонических проекций, хотя во всем тексте p_1 и p_2 обозначают размерности пространств трансцендентных циклов общих слоев семейств. Наконец, отметим, что в теореме 1 условие простоты размерностей пространств трансцендентных циклов является лишним и никак не используется при доказательстве теоремы, т.е. на самом деле доказывается более сильное утверждение, чем сформулированное в теореме 1. Тем не менее, все приведенные замечания имеют исключительно методический характер и никак не снижают научной значимости рассматриваемой диссертации.

Диссертация является целостным математическим исследованием, которое будет весьма полезным для специалистов по алгебраической геометрии, алгебре, теории чисел и другим смежным областям, работающих в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН, Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В.А. Стеклова РАН, механико-

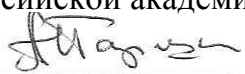
математическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова, факультете математики НИУ ВШЭ, математико-механическом факультете СПбГУ, физико-математическом факультете ЯГПУ им. К.Д. Ушинского, а также в других научных центрах России.

Результаты диссертации опубликованы в 8 работах, три из которых напечатаны в ведущих журналах из перечня ВАК. Содержание диссертации неоднократно докладывалось автором на международных и отечественных конференциях. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Все сказанное выше позволяет заключить, что диссертационная работа удовлетворяет требованиям ВАК Минобрнауки, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор Никольская Ольга Владимировна заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 - математическая логика, алгебра и теория чисел.

Отзыв обсужден и одобрен на заседании отдела алгебры и теории чисел Математического института им. В.А. Стеклова РАН 1 декабря 2014 г., протокол № 1.

Заведующий отделом алгебры и теории чисел
Математического института им. В.А. Стеклова РАН
доктор физико-математических наук, академик
Российской академии наук


_____ А.Н. Паршин

Старший научный сотрудник отдела алгебры и теории чисел
Математического института им. В.А. Стеклова РАН
кандидат физико-математических наук


_____ С.О. Горчинский

2 декабря 2014 г.