ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. К.Д. УШИНСКОГО

На правах рукописи

Ермакова Светлана Михайловна

ВЕКТОРНЫЕ РАССЛОЕНИЯ КОНЕЧНОГО РАНГА НА ПОЛНЫХ ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ КОНЕЧНОЙ КОРАЗМЕРНОСТИ В ЛИНЕЙНОМ ИНД-ГРАССМАНИАНЕ

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Александр Сергеевич Тихомиров

Ярославль – 2015

Оглавление

1. Введение

Возникновение задачи. Актуальность и степень разработанности темы исследования

Данная диссертационная работа посвящена классификации конечномерных векторных расслоений на полных пересечениях конечной коразмерности в линейном инд-грассманиане.

Впервые задачу классификации векторных расслоений на фиксированном многообразии поднял А. Гротендик. Он расклассифицировал векторные расслоения над проективной прямой, доказав, что всякое такое расслоение расщепляется в сумму линейных ([15], Chapter 1, §2, Theorem 2.1.1.).

Теорема (Гротендик). *Каждое голоморфное r-расслоение E над проективной прямой $\mathbb{P}^1$ представимо в виде*

$$E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_1) \oplus ... \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_r),$$

где $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_r$ - однозначно определенные целые числа.

Векторные расслоения на $\mathbb{P}^n$ при $n \geq 2$ не допускают такой простой классификации, в частности касательное расслоение к $\mathbb{P}^n$ является неразложимым при $n \geq 2$.

В то же время оказалось, что для конечномерных векторных расслоений на $\mathbf{P}^\infty$ верен аналог теоремы Гротендика. Этим вопросом занимались В. Барт, А. Ван де Вен, А.Н. Тюрин и Э. Сато.

Теорема (Барт - Ван де Вен - Тюрин - Сато). *Любое векторное расслоение конечного ранга на бесконечномерном комплексном проективном пространстве $\mathbf{P}^\infty = \{\mathbb{P}^1 \overset{\phi_1}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^2 \overset{\phi_2}{\hookrightarrow} \dots \overset{\phi_{m-1}}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^m \overset{\phi_m}{\hookrightarrow} \dots\}$ изоморфно прямой сумме линейных расслоений.*

Для расслоений ранга два эта теорема была доказана в 1974 году В. Бартом и А. Ван де Веном в [9], а для расслоений конечного ранга это было доказано в 1976 году А.Н. Тюриным в [20] и в 1977 году Э. Сато в [18]. Таким образом, вопрос классификации расслоений конечного ранга на $\mathbf{P}^\infty$ был закрыт.

В серии недавних работ [10, 17, 5] было показано, что теорема Барта - Ван де Вена - Тюрина - Сато имеет обобщения для бесконечномерных линейных инд-многообразий отличных от $\mathbf{P}^{\infty}$. Напомним определение.

Инд-многообразие $\mathbf{X} = \varinjlim X_m$ определяется как прямой предел цепочки вложений:

$$\mathbf{X} := \{X_1 \overset{\phi_1}{\hookrightarrow} X_2 \overset{\phi_2}{\hookrightarrow} \dots \overset{\phi_{m-1}}{\hookrightarrow} X_m \overset{\phi_m}{\hookrightarrow} \dots\},$$

где X_m - гладкое алгебраическое многообразие для каждого $m \geq 1$.

Инд-многообразие $\mathbf{X}$ называется *линейным*, если для $\forall m \geq 1$ вложение ϕ_m индуцирует эпиморфизм групп Пикара $\phi_m^* : PicX_{m+1} \to PicX_m$.

В 2003 году в статье [10] И. Донин и И.Б. Пенков рассматривают инд-грассманианы, определенные как прямые пределы цепочек

$$\{G(k_1, n_1) \overset{\phi_1}{\hookrightarrow} \dots \overset{\phi_m}{\hookrightarrow} G(k_{m+1}, n_{m+1}) \overset{\phi_{m+1}}{\hookrightarrow}\},$$

где последовательности $n_m, k_m, n_m - k_m$ возрастают и стремятся к бесконечности, а вложения ϕ_m являются стандартными расширениями грассманианов. Напомним, что вложение $G(k_1, V^{n_1}) \hookrightarrow G(k_2, V^{n_2})$ называется стандартным расширением, если имеется разложение $V^{n_2} = V^{n_1} \oplus W^{n_2 - n_1}$ и образ вложения состоит из подпространств вида $U^{k_1} \oplus W^{k_2 - k_1}$, где $U^{k_1} \subset V^{n_1}$, а $W^{k_2 - k_1}$ - фиксированное подпространство в $W^{n_2 - n_1}$.

Все инд-грассманианы, определенные таким образом, изоморфны и обозначаются через $\mathbf{G}(\infty)$. Для инд-грассманиана $\mathbf{G}(\infty)$ доказывается, что всякое конечномерное расслоение на нем расщепляется в сумму линейных.

В 2009 году в статье [17] А.С. Тихомиров и И.Б. Пенков доказывают расщепление расслоений ранга два для инд-грассманианов, определенных произвольными цепочками вида (1), снимая требование ϕ_m быть стандартным расширением (требуется лишь, чтобы всякое ϕ_m было вложением степени 1).

В статье [16] произведена классификация линейных инд-грассманианов, определенных как прямые пределы цепочек

$$\{X_1 \overset{\phi_1}{\hookrightarrow} \dots \overset{\phi_m}{\hookrightarrow} X_{m+1} \overset{\phi_{m+1}}{\hookrightarrow}\}, \tag{1}$$

где все X_m являются одновременно либо обычными, либо изотропными грассманианами. В частности, показано, что все линейные инд-грассманианы, рассматриваемые в работе [17], изоморфны $\mathbf{G}(\infty)$ или $\mathbf{P}^\infty$.

В 2014 году в статье [5] были выведены условия на локально полные линейные инд-многообразия $\mathbf{X}$, достаточные для выполнения аналога теоремы Барта - Ван де Вена - Тюрина - Сато. Новыми примерами инд-многообразий, которые удовлетворяют этим условиям, являются линейные сечения линейных инд-грассманианов, как обычных, так и изотропных. Таким образом, аналог теоремы Барта - Ван де Вена - Тюрина - Сато был доказан и для этого класса инд-многообразий.

Постановка задачи

В данной работе мы распространим теорему Барта - Ван де Вена - Тюрина - Сато на случай полного пересечения в линейном инд-грассманиане $\mathbf{G} := \mathbf{G}(\infty)$. Основным полем является поле комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Для линейного инд-грассманиана $\mathbf{G}$ определим плюккерово вложение $\mathbf{G} \hookrightarrow \mathbf{P}^\infty$, как прямой предел плюккеровых вложений грассманианов $G(k_m, n_m)$. Инд-гиперповерхностью степени d в $\mathbf{P}^\infty$ назовем прямой предел гиперповерхностей степеней d.

Рассмотрим линейный инд-грассманиан $\mathbf{G}$, вложенный по Плюккеру в $\mathbf{P}^\infty$. Пусть $\mathbf{Y_1}, ..., \mathbf{Y_l}$ - инд-гиперповерхности степеней $d_1, ..., d_l$ в $\mathbf{P}^\infty$. Линейное инд-многообразие

$$\mathbf{X} = \mathbf{G} \cap \mathbf{Y_1} \cap ... \cap \mathbf{Y_l}$$

называется *полным пересечением в* $\mathbf{G}$, если для всякого $m \geq 1$ многообразие $G(k_m, n_m) \cap \mathbf{Y_1} \cap ... \cap \mathbf{Y_l}$ является полным пересечением.

Под векторным расслоением $\mathbf{E}$ ранга $r > 0$ на $\mathbf{X}$ мы понимаем обратный предел $\mathbf{E} = \varprojlim E_m$ цепочки векторных расслоений $\{E_m\}_{m \geq 1}$ ранга r, где E_m - расслоение ранга r на X_m с фиксированными изоморфизмами $E_m \cong \phi_m^* E_{m+1}$.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Любое векторное расслоение* $\mathbf{E}$ *конечного ранга на полном пересечении* $\mathbf{X} \subset \mathbf{G}$ *конечной коразмерности изоморфно прямой сумме линейных расслоений.*

Цель работы

Целью работы является исследование инд-многообразий $\mathbf{X}$, являющихся полными пересечениями в линейном инд-грассманиане $\mathbf{G}$, и изучение векторных расслоений конечного ранга на этих инд-многообразиях. Главным результатом является доказательство теоремы 1.

Методология и методы исследования

В диссертации используется разнообразные методы алгебраической геометрии, такие как теория пересечений, теория пучков и их когомологий, язык теории схем, и методы теории категорий. Существенным образом используется классификация векторных расслоений конечного ранга на $\mathbf{P}^\infty$. Также используются топологические результаты, такие как формула Монка для когомологий пространства полных флагов.

Научная новизна. Положения выносимые на защиту

Все основные результаты диссертации являются новыми. Главные из них:

1. Доказана 1-связность инд-многообразия $\mathbf{X}$, а именно, для любых двух точек $\mathbf{X}$ существует конечная связная цепочка проективных прямых на $\mathbf{X}$, содержащих эти две точки. При некоторых ограничениях доказана связность и непустота пространства таких цепочек.

2. Доказано, что всякое векторное расслоение $\mathbf{E}$ конечного ранга на $\mathbf{X}$ является равномерным, то есть ограничение расслоения $\mathbf{E}$ на все проективные прямые в $\mathbf{X}$ имеет одинаковый тип расщепления.

3. Доказано, что любое равномерное векторное расслоение $\mathbf{E}$ конечного ранга на полном пересечении $\mathbf{X} \subset \mathbf{G}$ конечной коразмерности изоморфно прямой сумме линейных расслоений.

Теоретическая и практическая значимость работы

Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в дальнейших исследованиях векторных расслоений на проективных многообразиях и инд-многообразиях.

Степень достоверности и апробация результатов

Результаты диссертации докладывались
- в рамках летней школы-конференции по алгебраической геометрии и комплексному анализу для молодых ученых России (Ярославль, ЯГПУ, 20-25 мая 2013 г.), тезисы доклада опубликованы [4];
- на конференции "Международные Колмогоровские чтения - XIII" (Ярославль, 19 мая - 22 мая 2015 г.).

Публикация результатов

Основные результаты диссертации опубликованы в четырех работах [2, 3, 1, 12]. Три статьи опубликованы в журналах из списка ВАК РФ. Одна статья опубликована в журнале Complex Manifolds, входящем в базу MathSciNet. Все четыре статьи написаны без соавторов.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из оглавления, 6 глав (введение, основной текст диссертации, заключение) и списка литературы из 21 наименования. Текст диссертации изложен на 54 страницах.

2. Формулировка основного результата

Данная работа посвящена изучению векторных расслоений на инд-многообразиях. Прежде чем формулировать главный результат мы дадим определения и введем обозначения.

Все векторные пространства и алгебраические многообразия определены над алгебраически замкнутым полем характеристики 0.

2.1. Обозначения и первоначальные сведения

Вначале напомним определение линейных инд-многообразий, в частности, линейных инд-грассманианов, изученных И.Б. Пенковым и А.С. Тихомировым [16, 5, 17].

Определение 1. ***Инд-многообразие*** $\mathbf{X} = \varinjlim X_m$ *определяется как прямой предел цепочки вложений:*

$$\mathbf{X} := \{X_1 \overset{\phi_1}{\hookrightarrow} X_2 \overset{\phi_2}{\hookrightarrow} \ldots \overset{\phi_{m-1}}{\hookrightarrow} X_m \overset{\phi_m}{\hookrightarrow} \ldots\},$$

где X_m - гладкое алгебраическое многообразие для каждого $m \geq 1$.

Определение 2. ***Векторное расслоение*** $\mathbf{E}$ *ранга $r > 0$ на $\mathbf{X}$ есть обратный предел*

$$\mathbf{E} = \varprojlim E_m$$

цепочки векторных расслоений $\{E_m\}_{m \geq 1}$ ранга r на $\mathbf{X}$, где E_m - расслоение ранга r на X_m с фиксированными изоморфизмами $E_m \cong \phi_m^* E_{m+1}$.

Так же на инд-многообразии $\mathbf{X}$ корректно определен структурный пучок $\mathcal{O}_{\mathbf{X}} = \varprojlim \mathcal{O}_{X_m}$. Под группой Пикара мы будем понимать группу классов изоморфизма линейных расслоений (то есть обратимых пучков) на $\mathbf{X}$.

Определение 3. *Инд-многообразие $\mathbf{X}$ называется* ***линейным****, если для $\forall m \geq 1$ вложение ϕ_m индуцирует эпиморфизм групп Пикара $\phi_m^* : Pic X_{m+1} \to Pic X_m$.*

Простейшим примером линейного инд-многообразия является бесконечномерное проективное инд-пространство $\mathbf{P}^\infty = \{\ldots \mathbb{P}^{n-1} \overset{\phi_{n-1}}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^n \ldots\}$, где все вложения ϕ_i имеют степень 1.

Линейные инд-грассманианы и полные пересечения в них

Через $G(k,n)$ мы будем обозначать грассманиан k-мерных векторных подпространств в векторном пространстве V^n.

Определим линейный инд-грассманиан и его плюккерово вложение.

Пусть n_m и k_m возрастающие последовательности натуральных чисел, удовлетворяющие условиям

$$k_m \leq n_m,$$
$$\lim_{m\to\infty} k_m = \lim_{m\to\infty} (n_m - k_m) = \infty.$$

Для всякого $m \geq 1$ рассмотрим векторное пространство V^{n_m} размерности n_m и грассманиан $G(k_m, n_m)$ k_m-мерных векторных подпространств в V^{n_m}. Вместе с $G(k_m, n_m)$ рассматривается его плюккерово вложение: $G(k_m, n_m) \hookrightarrow \mathbb{P}^{N_m - 1} = \mathbb{P}(\Lambda^{N_m})$, где $N_m = \binom{n_m}{k_m}$.

По определению линейный инд-грассманиан $\mathbf{G} := \mathbf{G}(\infty)$ есть индуктивный предел $\varinjlim G(k_m, n_m)$ цепочки вложений:

$$\mathbf{G} := \{G(k_1,n_1) \overset{\phi_1}{\hookrightarrow} G(k_2,n_2) \overset{\phi_2}{\hookrightarrow} \ldots \overset{\phi_{m-1}}{\hookrightarrow} G(k_m,n_m) \overset{\phi_m}{\hookrightarrow} \ldots\},$$

при этом, всякое вложение ϕ_i должно индуцировать изоморфизм групп Пикара.

Стоит обратить внимание на то, что инд-грассманиан $\mathbf{G}$, описанный выше, единственный с точностью до изоморфизма, и не изменится, если мы удалим из цепочки конечную последовательность грассманианов $G(k_m, n_m)$ [16].

Инд-грассманиан $\mathbf{G}$ снабжен обратимым пучком $\mathcal{O}_{\mathbf{G}}(1) = \varprojlim \mathcal{O}_{G(k_m,n_m)}(1)$, где класс изоморфизма обильного пучка $\mathcal{O}_{G(k_m,n_m)}(1)$ есть образующая группы Пикара грассманиана $G(k_m,n_m)$ для всех $m \geq 1$ ([13], Chapter 1).

Из линейности грассманиана $\mathbf{G}$ вытекает, что вложения

$$\{\ldots \stackrel{\phi_{m-1}}{\hookrightarrow} G(k_m,n_m) \stackrel{\phi_m}{\hookrightarrow} G(k_{m+1},n_{m+1}) \stackrel{\phi_{m+1}}{\hookrightarrow} \ldots\}$$

продолжаются до линейных вложений плюккеровых пространств

$$\{\ldots \stackrel{\phi_{m-1}}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^{N_m-1} \stackrel{\phi_m}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^{N_{m+1}-1} \stackrel{\phi_{m+1}}{\hookrightarrow} \ldots\}.$$

Далее, для $l \geq 1$ и $d_1, d_2, \ldots, d_l \geq 1$ мы будем рассматривать линейное инд-подмногообразие $\mathbf{X}$ линейного инд-грассманиана $\mathbf{G}$, которое является прямым пределом $\mathbf{X} = \varinjlim X_m$ цепочки вложений

$$\mathbf{X} := \{X_1 \stackrel{\phi_1}{\hookrightarrow} X_2 \stackrel{\phi_2}{\hookrightarrow} \ldots \stackrel{\phi_{m-1}}{\hookrightarrow} X_m \stackrel{\phi_m}{\hookrightarrow} \ldots\},$$

где X_m - полное пересечение грассманиана $G(k_m,n_m) \subset \mathbb{P}^{N_m-1}$ с l гиперповерхностями $Y_{1,m}, Y_{2,m}, \ldots, Y_{l,m} \subset \mathbb{P}^{N_m-1}$ фиксированных степеней $\deg Y_{i,m} = d_i$, $i = 1,...,l$, $m \geq 1$:

$$X_m = G(k_m,n_m) \cap \bigcap_{i=1}^{l} Y_{i,m}, \quad \mathrm{codim}_{G(k_m,n_m)} X_m = l.$$

Определение 4. *Построенное выше инд-многообразие* $\mathbf{X}$ *назовем* ***полным пересечением*** *коразмерности* l *в линейном инд-грассманиане* $\mathbf{G}$.

Другими словами, инд-многообразие $\mathbf{X}$ представляет собой полное пересечение инд-грассманиана $\mathbf{G}$ с инд-гиперповерхностями $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}, \ldots, \mathbf{Y_l}$ в линейном проективном инд-пространстве $\mathbf{P}^\infty = \varinjlim \mathbb{P}^{N_m-1}$:

$$\mathbf{X} = \mathbf{G} \cap \bigcap_{i=1}^{l} \mathbf{Y_i}, \ \mathbf{Y_i} = \varinjlim Y_{i,m}, \ i = 1,...,l, \ m \geq 1.$$

Для $i = 1, ..., l$ число $\deg \mathbf{Y_i} := \deg Y_{i,m} = d_i$, $m \geq 1$, называется *степенью* инд-гиперповерхности $\mathbf{Y_i}$ в $\mathbf{P}^\infty$.

Всюду далее мы будем работать именно с таким инд-многообразием $\mathbf{X}$, и будем изучать векторные расслоения $\mathbf{E}$ ранга r на нем.

2.2. Постановка задачи и план доказательства

Теперь мы имеем представление об объектах, с которыми нам предстоит иметь дело. Перейдем к формулировке теоремы, доказательство которой и является нашей главной задачей.

Теорема 1. *Любое векторное расслоение* $\mathbf{E}$ *конечного ранга на инд-многообразии* $\mathbf{X}$ *изоморфно прямой сумме линейных расслоений.*

Доказательство этой теоремы состоит из нескольких этапов, которые изложены в последующих главах.

В главе 3 мы рассматриваем *пространство путей* длины n, соединяющих две точки полного пересечения грассманиана $G(n, V^{2n})$ с l гиперповерхностями степеней $d_1, ..., d_l$. Под путем здесь понимается набор последовательно пересекающихся друг с другом проективных прямых в X, посредством которых от одной точки можно дойти до другой. Основным результатом является условие на числа $n, d_1, ..., d_l$, при выполнении которого, пространство путей, соединяющих любые две точки полного пересечения, связно и непусто. Так же получено условие на числа $k, n, d_1, ..., d_l$ для случая полного пересечения грассманиана $G(k, V^n)$. В этом случае мы получаем связность и непустоту пространства путей длины k.

Главным результатом главы 4 является доказательство *равномерности* любого конечномерного расслоения $\mathbf{E}$ на $\mathbf{X}$. Это означает, что векторное расслоение $\mathbf{E}$ при ограничении на все проективные прямые из $\mathbf{X}$ имеет одинаковое разложение в прямую сумму линейных расслоений.

В главе 5 мы показываем, что во всяком равномерном расслоении $\mathbf{E}$ имеется флаг подрасслоений $0 = \mathbf{F_0} \subset$

$\mathbf{F_1} \subset \mathbf{F_2} \subset \ldots \subset \mathbf{F_s} = \mathbf{E}$, таких, что каждое из фактор-расслоений $\mathbf{F_i}/\mathbf{F_{i-1}}$ является подкруткой линейно тривиального расслоения на $\mathcal{O}(a_i)$ для $1 \leq i \leq s$. Мы доказываем далее, что любое конечномерное линейно тривиальное расслоение на $\mathbf{X}$ является тривиальным. Затем приводим доказательство того, что расслоение $\mathbf{E}$ расщепляется в сумму $\oplus_i \mathbf{F_i}/\mathbf{F_{i-1}}$. Используя равномерность векторного расслоения $\mathbf{E}$ и 1-связность инд-многообразия $\mathbf{X}$, мы завершаем доказательство теоремы 1.

Теперь приступим к подробному доказательству основных этапов.

3. Связность и непустота пространства путей на полном пересечении в инд-грассманиане

Начнем с необходимых определений.

Определение 5. *Пусть X - проективное многообразие с обильным пучком $\mathcal{O}_X(1)$. Назовем* ***проективным подпространством*** *в X такое многообразие $M \simeq \mathbb{P}^r$ в X, что $\mathcal{O}_X(1)|_M \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)$. В случае, если M одномерно, назовем его* ***проективной прямой*** *в X, или просто* ***прямой*** *в X.*

Определение 6. ***Путь*** *$p_n(x,y)$ длины n на многообразии X, соединяющий точки x,y, - это набор точек $x = x_0, x_1, ..., x_n = y$ в X и набор проективных прямых $l_0, ..., l_{n-1}$ в X, таких, что $x_i, x_{i+1} \in l_i$. Многообразие всех путей длины n, соединяющих точки x и y, обозначим $P_n(x,y)$.*

Замечание 1. *Оба определения переносятся дословно на случай инд-многообразия $\mathbf{X}$.*

Основным результатом настоящей главы является следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть X - полное пересечение грассманиана $G(n,2n)$, вложенного по Плюккеру, с набором гиперповерхностей степеней $d_1, ..., d_l$: $X = G(n,2n) \cap \bigcap_{i=1}^{l} Y_i$. Если $2\sum_i (d_i+1) \leq [\frac{n}{2}]$, то многообразие $P_n(u,v)$ путей длины n, соединяющих любые две точки u,v в X, непусто и связно.*

3.1. Первоначальные сведения и идея доказательства

Первым делом докажем следующее утверждение:

Лемма 1. *Пусть X - проективное многообразие, тогда пространство путей длины n, соединяющих любые две точки X, также является проективным многообразием.*

Доказательство. Пусть $F(X)$ - многообразие Фано прямых на X. Рассмотрим декартово произведение $X^{n+1} \times F(X)^n$, содержащее $n+1$ копий многообразия X и n копий многообразия

$F(X)$. Пространство всех путей длины n изоморфно пересечению n подмногообразий этого произведения, определенных следующим образом: прямая из i-ого фактора $F(X)$ содержит точки из i-ого и $(i+1)$-ого факторов X.

Аналогично доказывается и утверждение про пути, соединяющие две фиксированные точки на X. $\square$

Следующий шаг - дать описание пространства путей длины n, соединяющих две общие точки на грассманиане $G(n,2n)$.

Лемма 2. *Пусть U, V - два трансверсальных n-мерных векторных подпространства в W^{2n}. Обозначим через u и v соответствующие точки грассманиана $G(n,2n)$ n-мерных подпространств $2n$-мерного пространства W^{2n}. Пространство $P_n(u,v)$ путей из n звеньев, соединяющих u и v на $G(n,2n)$, изоморфно произведению двух пространств полных флагов $F(U)\times F(V)$.*

Доказательство. Построим изоморфизм $F(U)\times F(V)\to P_n(u,v)$. Пусть

$$U^1\subset ...\subset U^{n-1}\subset U^n=U,\quad V^1\subset ...\subset V^{n-1}\subset V^n=V$$

два полных флага. Тогда определим i-ую прямую в цепочке как множество всех n-мерных подпространств в $U^{n-i+1}\oplus V^i$, содержащих $U^{n-i}\oplus V^{i-1}$. Таким образом, мы получим связную цепочку прямых, где общей точкой i-ой и $(i+1)$-ой прямых является n-плоскость $U^{n-i}\oplus V^i$.

Таким образом, каждой точке $F(U)\times F(V)$ мы сопоставили цепочку из $P_n(u,v)$, а следовательно, получили инъективный морфизм $F(U)\times F(V)\to P_n(u,v)$. Докажем теперь, что морфизм является сюрьективным.

Пусть $p_n(u,v)$ - путь длины n в $G(n,2n)$, соединяющий точки u и v. Каждой вершине цепочки соответствует точка u_i грассманиана. Тогда имеем соответствие между точками u_i и n-мерными подпространствами U_i в W^{2n} для $0\le i\le n$, и выполнено $U_0=U$, $U_n=V$. Заметим, что для всякого i размерность пересечения n-плоскостей U_i и U_{i+1} не меньше $n-1$. Таким образом, мы получаем, что для всякого i имеются следующие неравенства:

$$\dim(U\cap U_i)\ge n-i,\ \ \dim(V\cap U_i)\le i.$$

Рассмотрим $n+1$ число $d_i = dim(U \cap U_i)$ для $0 \leq i \leq n$. Разница $d_i - d_{i+1}$ может быть равна $\pm\ 1$ или 0. Но для нашего случая должно быть $n+1$ число, от n до 0. И такая последовательность единственна: $n, n-1, n-2, ..., 1, 0$. Значит $d_i - d_{i+1} = 1$. Отсюда вытекает, что приведенные выше неравенства на самом деле обязаны быть равенствами, поэтому путь $p_n(u,v)$ лежит в образе морфизма, и, значит, морфизм сюрьективен.

Наконец, чтобы доказать, что морфизм является изоморфизмом, достаточно проверить, что его образ является гладким подмногообразием пространства всех цепочек длины n в $G(n,2n)$, которое само является гладким. Гладкость образа вытекает из того, что группа $GL(U) \times GL(V)$ действует на пространстве всех цепочек, и образ морфизма представляет собой замкнутую орбиту этого действия. $\square$

Таким образом, на грассманиане $G(n,2n)$ пространство путей длины n, соединяющих две общие точки, изоморфно прямому произведению $F_n \times F_n$ двух полных пространств n-мерных флагов. Идея доказательства теоремы 2 состоит в том, чтобы построить на $F_n \times F_n$ глобально порожденное векторное расслоение $\mathcal{E}$ с выделенным сечением s, таким что нули s задают пространство путей длины n, соединяющих x и y и лежащих в пересечении гиперповерхностей степеней $d_1, ..., d_l$. Используя явное представление расслоения $\mathcal{E}$ в виде прямой суммы линейных расслоений, мы покажем, что нули общего, а следовательно, и любого сечения $\mathcal{E}$ образуют непустое, связное подмногообразие в $F_n \times F_n$.

Для построения расслоения нам будет необходимо рассмотреть n различных проекций $p_k : F(U) \times F(V) \to F(n+1, n-1; 2n)$, которые определяются следующим образом:

$$p_k(U^1 \subset ... \subset U^{n-1}, V^1 \subset ... \subset V^{n-1}) =$$
$$= (U^{n-k+1} \oplus V^k, U^{n-k} \oplus V^{k-1}) \subset U \oplus V.$$

3.2. Связность нулей сечения глобально порожденного расслоения

В этом параграфе мы приводим топологический критерий для связности нулей сечений глобально порожденных расщепимых векторных расслоений.

Определение 7. *Векторное расслоение E на многообразии X называется* ***глобально порожденным****, если для всякой точки x и вектора $v \in E_x$ существует сечение $s \in H^0(E)$, такое что $s(x) = v$.*

Лемма 3. *Пусть L - глобально порожденное линейное расслоение на связном проективном многообразии X и $c_1(L)^2 \neq 0 \in H^4(X, \mathbb{R})$. Тогда для всякого сечения $s \in H^0(L)$ гиперповерхность $\{s = 0\}$ связна.*

Доказательство. Так как L - глобально порожденное расслоение, имеется естественный морфизм $f : X \to \mathbb{P}(H^0(X, L))^*$, заданный полной линейной системой линейного расслоения L. Пусть Y - образ X, тогда $L \cong f^*(\mathcal{O}_Y(1))$. Так как $c_1(L) \neq 0$, Y имеет ненулевую размерность. Естественно, расслоение $\mathcal{O}_Y(1)$ обильно на Y.

В случае если слои отображения $f : X \to Y$ несвязны, рассмотрим факторизацию Штейна $f = gh$, $h : X \to Z$, $g : Z \to Y$, где h - морфизм со связными слоями, а g - конечный морфизм. Пусть $L_1 = g^*(\mathcal{O}_Y(1))$. Так как g - конечный морфизм, то L_1 тоже обильно.

Осталось рассмотреть два случая. Если $\dim(Z) > 1$, то дивизор нулей любого сечения L_1 связен (так как L_1 обильно). А так как слои h связны, то и прообраз этого дивизора на X связен. Если же $\dim(Z) = 1$, то $c_1(\mathcal{O}_Y(1))^2 = 0$, а значит $c_1(L)^2 = h^*(c_1(L_1)^2) = 0$. $\square$

Если существует такое собственное, замкнутое по Зарисскому подмножество $Z \subset \mathbb{P}(H^0(X, E))$, что всякое ненулевое сечение $s \in H^0(X, E)$, чья проективизация лежит в дополнении к Z, удовлетворяет некоторому свойству, то мы будем говорить, что общее сечение расслоения E на многообразии X удовлетворяет данному свойству.

Следующая лемма стандартна, см. [11, Глава 7].

Лемма 4. *Пусть L - глобально порожденное линейное расслоение на неприводимом проективном многообразии Y и $c_1(L) \neq 0$. Тогда для общего сечения s расслоения L многообразие $\{s = 0\}$ имеет коразмерность 1 и $c_1(L) = [\{s = 0\}] \in H^2(Y)$.*

Следующая теорема является обобщением леммы 3.

Теорема 3. *Пусть $E = L_1 \oplus L_2 \oplus ... \oplus L_n$ - векторное расслоение на связном проективном многообразии X, такое, что каждое из линейных расслоений L_i глобально порождено. Предположим, что элемент $c_{2n}(E \oplus E)$ группы $H^{4n}(X, \mathbb{R})$ отличен от 0. Тогда для всякого сечения s расслоения E многообразие $\{s = 0\}$ непусто и связно.*

Доказательство. Так как $c_{2n}(E \oplus E) \neq 0$, то $c_n(E) \neq 0$, а значит все сечения расслоения E имеют нули (см. [11, Глава 7]).

Теперь мы докажем, что для *общего* сечения s расслоения E многообразие $\{s = 0\}$ связно. Будем рассуждать от противного. Предположим, что для общего сечения s многообразие $\{s = 0\}$ несвязно. Представим s в виде $s = s_1 + ... + s_n$ где s_i является сечением расслоения L_i. Так как $c_n(E) \neq 0$, то сечение s имеет нули. Поэтому многообразие $Y_k = \{s_1 = ... = s_k = 0\}$ непусто для всякого $k \leq n$ и значит, в силу леммы 4 имеет коразмерность k. Более того, в силу леммы 4, имеется следующее равенство в когомологиях:

$$[Y_i] = c_1(L_1) \cdot ... \cdot c_1(L_i) \in H^{2i}(X).$$

Найдем максимальное k, такое что многообразие $Y_k = \{s_1 = ... = s_k = 0\}$ связно. Применив лемму 3 к многообразию Y_k и линейному расслоению L_{k+1}, мы видим, что

$$[Y_k] \cdot c_1(L_{k+1})^2 = c_1(L_1) \cdot ... \cdot c_1(L_k) \cdot c_1(L_{k+1}^2) = 0.$$

Тем более $c_{2n}(E \oplus E) = \Pi_{i=1}^n c_1(L_i)^2 = 0$, а значит, мы получили противоречие.

Таким образом, для общего сечения E теорема доказана. Чтобы доказать теорему для всех сечений, осталось доказать следующую лемму.

Лемма 5. *Пусть E - векторное расслоение над неприводимым проективным многообразием X, удовлетворяющее следующим трем условиям:*

1) Ранг E меньше размерности X.

2) E глобально порождено.

3) Для общего сечения $s \in H^0(E)$ многообразие $\{s = 0\}$ непусто и связно.

Тогда многообразие $\{s = 0\}$ связно для произвольного сечения s расслоения E.

Доказательство леммы. Рассмотрим в $\mathbb{P}(H^0(E)) \times X$ подмногообразие инцидентности Γ, параметризующее пары (s, x), такие что $s(x) = 0$ ($s \neq 0 \in H^0(E)$).

Так как E глобально порождено, Γ является расслоением над X со слоем $\mathbb{P}^k$, где $k = \dim H^0(E) - \mathrm{rank} E - 1$. А следовательно, Γ связно и, более того, неприводимо.

Заметим теперь, что из условия 3) леммы следует, что все сечения E имеют нули, и, значит, проекция Γ на $\mathbb{P}(H^0(E))$ является доминантным отображением. Также из условия 3) леммы следует, что общий слой проекции Γ на $\mathbb{P}(H^0(E))$ связен. А так как $\mathbb{P}(H^0(E))$ нормально, то из факторизации Штейна [[21], Chapter III, §11, Corollary 11.5] следует, что все слои этой проекции связны.

Это завершает доказательство леммы, а вместе с ней и теоремы. □

3.3. Когомологии пространства флагов

В этом параграфе мы соберем необходимые нам факты о когомологиях пространства полных флагов и докажем необращение в ноль одного из классов когомологий, которое необходимо нам для доказательства непустоты и связности пространства путей.

Напомним, что на пространстве F_n есть семейство тавтологических расслоений

$$\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_1 \subset ... \subset \mathcal{U}_{n-1} \subset \mathcal{U}_n,$$

где $\mathcal{U}_0$ - нулевое расслоение, $\mathcal{U}_n$ - тривиальное расслоение ранга n. Положим

$$L_i = \mathcal{U}_i/\mathcal{U}_{i-1}, \quad x_i = -c_1(L_i), \quad 1 \le i \le n.$$

Имеет место следующий результат:

Теорема 4. *Кольцо когомологий $H^*(F_n)$ порождается мультипликативно единицей и классами x_i. Оно имеет размерность $n!$ и имеет следующее представление:*

$$H^*(F_n) = \mathbb{Z}[x_1, ..., x_n]/(e_1(x_1, ..., x_n), ..., e_n(x_1, ..., x_n)),$$

где e_i - элементарные симметрические многочлены.

Для нас будут особенно важны классы $\sigma_i = c_1(\mathcal{U}_i^*) \in H^2(F_n)$. Очевидно что $\sigma_i = x_1 + ... + x_i$. Из описания кольца когомологий вытекает, что классы $\sigma_1, ..., \sigma_{n-1}$ порождают $H^2(F_n)$, а также, вместе с единицей, порождают мультипликативно $H^*(F_n)$.

В пространстве F_n есть выделенный набор циклов Шуберта X_w, который нумеруется всевозможными перестановками w из симметрической группы S_n. При этом классы $[X_w]$ формируют целочисленный базис в кольце когомологий $H^*(F_n)$, а классы σ_i соответствуют циклам $[X_{(i\,i+1)}]$, где $(i\,i+1)$ - транспозиция.

Коразмерность цикла Шуберта X_w равна *длине* элемента w. Напомним, что *длиной* элемента w из S_n называется минимальное число i, такое, что $w = \sigma_{r_1} \cdot ... \cdot \sigma_{r_i}$. Длина w обозначается через $l(w)$, и мы имеем $[X_w] \in H^{l(w)}$.

Нам потребуются два свойства произведений циклов Шуберта.

Предложение 1. *Произведение любого числа циклов Шуберта $[X_w]$ является линейной комбинацией циклов Шуберта* с неотрицательными *коэффициентами.*

Формула Монка дает конкретное разложение по базису циклов Шуберта произведения $\sigma_r \cdot [X_w]$.

Теорема 5. *Пусть* $[X_w]$ *- цикл Шуберта, соответствующий слову* $w \in S_n$ *и* $\sigma_r = [X_{(r\,r+1)}]$. *Тогда*

$$\sigma_r \cdot [X_w] = \sum_{\substack{\ell(w(ij)) = \ell(w) + 1 \\ i \le r < j}} X_{w(ij)}.$$

Из этой формулы несложно вывести следующий результат:

Следствие 1. *В когомологиях пространства полных флагов выполняется*

$$(\sigma_1 \cdot \ldots \cdot \sigma_{n-1})^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \neq 0 \in H^{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor},$$

где $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ *- целая часть* $\frac{n}{2}$.

Напомним, что слово $(r_1\ r_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (r_N\ r_{N+1})$ называется *приведенным*, если для всякого $k \le N$ выполнено $l((r_1\ r_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (r_k\ r_k + 1)) = k$.

Доказательство. Напомним, что единица в $H^*(F_n)$ соответствует единичной перестановке e. Таким образом, из формулы Монка следует, что коэффициент при $[X_w]$ в разложении цикла $\sigma_{r_1} \cdot \sigma_{r_2} \cdot \ldots \cdot \sigma_{r_N}$ по циклам Шуберта равен числу цепочек

$$e = w_0,\ w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_N = w,$$

таких, что $\ell(w_k) = k$, и w_k имеет вид $w_{k-1}(ij)$ с $i \le r_k < j$.

В частности, если слово $(r_1\ r_1 + 1)(r_2\ r_2 + 1) \cdots (r_N\ r_N + 1)$ приведенное (то есть произведение любых первых k транспозиций имеет длину k), тогда $\sigma_{r_1} \cdot \sigma_{r_2} \cdot \ldots \cdot \sigma_{r_N} \neq 0 \in H^*(F_n)$.

Осталось заметить, что слово

$$\Big((1\ 2)(3\ 4)(5\ 6) \cdots (2\ 3)(4\ 5)(6\ 7) \cdots\Big)^{\lfloor n/2 \rfloor}$$

- приведенное. $\square$

3.4. Расслоения на пространствах флагов

В этом параграфе мы построим обещанное векторное расслоение на $F_n \times F_n$, покажем, что оно расщепляется в сумму линейных, и вычислим его старший класс Черна. Такое расслоение возникает всякий раз, когда мы рассматриваем пересечение $G(n, 2n)$ с набором гиперповерхностей, и конкретный выбор гиперповерхностей определяет сечение расслоения (с точностью до пропорциональности). Чтобы объяснить конструкцию, достаточно рассмотреть случай пересечения $G(n, 2n)$ с одной гиперповерхностью степени d.

Итак, рассмотрим грассманиан $G(n, 2n)$, вложенный по Плюккеру. Пусть s_d - сечение $\mathcal{O}(d)$, соответствующее гиперповерхности Y_d степени d, которую мы пересекаем с $G(n, 2n)$. Прежде чем строить расслоение, рассмотрим более простой вопрос о том, как получить аналогичное описание для многообразия Фано прямых, лежащих на $G(n, 2n) \cap Y_d$. Напомним, что многообразие Фано самого грассманиана изоморфно пространству частичных флагов $F(n + 1, n - 1; 2n)$. Имеется следующая лемма:

Лемма 6. *Всякому сечению $s_d \in \mathcal{O}(d)$ на грассманиане $G(n, 2n)$ соответствует сечение*

$$s'_d \in E_d = S^d((\mathcal{W}_{n+1}/\mathcal{W}_{n-1})^* \otimes \Lambda^{n-1}(\mathcal{W}^*_{n-1})) \tag{2}$$

на $F(n + 1, n - 1; 2n)$, такое, что нули s'_d соответствуют пространству прямых на $G(n, 2n)$, лежащих в нулях сечения s.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $d = 1$. В этом случае утверждение вытекает из того, что для всякой пары $W_{n-1} \subset W_{n+1}$ подпространств W_{2n} имеется естественное линейное отображение

$$H^0(G(n, 2n), \mathcal{O}(1)) \cong \Lambda^n(W^*_{2n}) \to (W_{n+1}/W_{n-1})^* \otimes \Lambda^{n-1}(W^*_{n-1}).$$

Это отображение как раз и задает искомое линейное отображение

$$H^0(G(n, 2n), \mathcal{O}(1)) \to H^0((\mathcal{W}_{n+1}/\mathcal{W}_{n-1})^* \otimes \Lambda^{n-1}(\mathcal{W}^*_{n-1})).$$

Для общего же случая заметим, что

$$H^0(G(n, 2n), \mathcal{O}(d)) \subset S^d(\Lambda^n(W^*_{2n})).$$

Таким образом, мы получаем отображение

$$H^0(G(n,2n),\mathcal{O}(d)) \to S^d(\Lambda^n(W_{2n}^*)) \to$$

$$S^d((W_{n+1}/W_{n-1})^* \otimes \Lambda^{n-1}(W_{n-1}^*)).$$

Это отображение дает нам искомое сечение s'_d. Несложно проверить, что его нули высекают на $F(n+1,n-1;2n)$ многообразие Фано прямых на $G(n,2n) \cap \{s_d = 0\}$. $\square$

Построение расслоения и сечения на $F_n \times F_n$.

Мы определим на $F_n \times F_n$ расслоение E_d ранга $n(d+1)-2$ и его сечение s, такие, что точка $P \in F_n \times F_n$ лежит в многообразии $\{s=0\}$ тогда и только тогда, когда путь P лежит в гиперповерхности Y_d.

Для того, чтобы путь P лежал в Y_d, необходимо и достаточно, чтобы каждое звено P лежало в Y_d. Иными словами, необходимо, чтобы для всякого k точка $p_k(P) \in F(n+1, n-1; 2n)$ соответствовала прямой, лежащей на Y_d. Таким образом, для каждого k, используя лемму 6 и определение морфизма p_k, мы видим, что точка P лежит в нулях сечения $p_k^*(s'_d)$ расслоения $p_k^*(E_d)$. Из этого сразу же следует, что в качестве искомого расслоения на $F_n \times F_n$ мы могли бы взять $p_1^*(E_d) \oplus p_2^*(E_d) \oplus ... \oplus p_n^*(E_d)$. Однако вместо него нам придется взять некоторое его подрасслоение коранга два. А именно, имеет место следующая лемма, поясняющая выбор такого подрасслоения.

Лемма 7. *1) Расслоения $p_1^*(E_d)$ и $p_n^*(E_d)$ канонически расщепляются в суммы $p_1^*(E_d) \cong \mathcal{O} \oplus p_1^*(E_d)/\mathcal{O}$, $p_n^*(E_d) \cong \mathcal{O} \oplus p_n^*(E_d)/\mathcal{O}$.*

2) Более того, в случае если гиперповерхность $\{s_d = 0\}$ содержит точки u и v грассманиана $G(n, 2n)$, то сечения $p_1^*(s'_d)$ и $p_n^*(s'_d)$ лежат в подрасслоениях $p_1^*(E_d)/\mathcal{O}$ и $p_n^*(E_d)/\mathcal{O}$ соответственно.

Мы дадим доказательство этой леммы в следующем параграфе, после того, как будет выведен явный вид расслоений $p_1^*(E_d)$ и $p_n^*(E_d)$. Заметим пока только, что в нашей задаче точки u и v лежат на гиперповерхности $\{s_d = 0\}$ (так как мы изучаем пространство путей, соединяющих две точки пересечения $G(n, 2n) \cap \{s_d = 0\}$). Если бы в качестве расслоения на $F_n \times F_n$ мы взяли всю сумму $p_1^*(E_d) \oplus p_2^*(E_d) \oplus ... \oplus p_n^*(E_d)$, то у такого расслоения было бы сечение без нулей. А именно, можно было бы просто взять сечение s_d такое, что $\{s_d = 0\}$ не проходит через u и v. Именно, чтобы разрешить эту проблему, мы должны несколько модифицировать расслоение на $F_n \times F_n$. Это приводит нас к следующему определению.

Определение 8. *Рассмотрим на $F_n \times F_n$ следующее расслоение $\mathcal{E}_d^F$ вместе с сечением s_d^F:*

$$\mathcal{E}_d^F := (p_1^*(E_d)/\mathcal{O}) \oplus p_2^*(E_d) \oplus ... \oplus p_{n-1}^*(E_d) \oplus (p_n^*(E_d)/\mathcal{O}),$$

$$s_d^F := p_1^*(s_d') + \dots + p_n^*(s_d').$$

Многообразие путей длины n, соединяющих точки u и v на $G(n,2n)\cap Y_d$, высекается нулями сечения s_d^F.

Свойства расслоения $\mathcal{E}_d^F$

В этом параграфе мы покажем, что расслоение $\mathcal{E}_d^F$ глобально порождено, и разложим его в сумму линейных расслоений.

Лемма 8. *Обратный образ расслоения E_d при отображении p_k имеет вид:*

$$p_k^*(E_d) = S^d(((\mathcal{U}_{n-k+1}/\mathcal{U}_{n-k})\oplus(\mathcal{V}_k/\mathcal{V}_{k-1}))^*\otimes\Lambda^{n-k}(\mathcal{U}_{n-k}^*)\otimes\Lambda^{k-1}(\mathcal{V}_{k-1}^*)).$$

Доказательство. Пользуясь определением отображения p_k, мы получаем

$$p^*(\mathcal{W}_{n+1}) = \mathcal{U}_{n-k+1}\oplus\mathcal{V}_k,\ p^*(\mathcal{W}_{n-1}) = \mathcal{U}_{n-k}\oplus\mathcal{V}_{k-1}.$$

Остается воспользоваться формулой (2) и очевидным изоморфизмом

$$\Lambda^{n-1}(\mathcal{U}_{n-k}^*\oplus\mathcal{V}_{k-1}^*) = \Lambda^{n-k}(\mathcal{U}_{n-k}^*)\otimes\Lambda^{k-1}(\mathcal{V}_{k-1}^*).$$

$\square$

Лемма 9. *Расслоение $\mathcal{E}_d^F$ расщепляется в сумму линейных глобально порожденных расслоений.*

Доказательство. Достаточно доказать эту лемму для каждого из слагаемых $p_k^*(E_d)$. Заметим, что расслоение E_d на $F(n+1, n-1; 2n)$ глобально порождено. Действительно, для всякого выбора ограничения сечения расслоения $\mathcal{O}(d)$ на прямую в $G(n,2n)$ существует сечение расслоения $\mathcal{O}(d)$, имеющее выбранное ограничение на прямую. Таким образом, расслоение $p_k^*(E_d)$ также глобально порождено.

Согласно лемме 8, расслоение $p_k^*(E_d)$ является симметрической степенью суммы двух линейных расслоений. Значит, оно само также расщепляется в сумму линейных. Наконец, заметим, что если глобально порожденное расслоение распадается в сумму линейных, то каждое из слагаемых также глобально порождено, так как имеется проекция всего расслоения на каждое из слагаемых. $\square$

Доказательство леммы 7. Мы рассмотрим случай расслоения $p_1^*(E_d)$; случай расслоения $p_n^*(E_d)$ аналогичен. Согласно лемме 8,

$$p_1^*(E_d) = S^d(((\mathcal{U}_n/\mathcal{U}_{n-1}) \oplus \mathcal{V}_1)^* \otimes \Lambda^{n-1}(\mathcal{U}_{n-1}^*)).$$

Так как $\mathcal{U}_n \cong \mathcal{O}^{\oplus n}$, то $\Lambda^n(\mathcal{U}_n) \cong \mathcal{O}$, из чего вытекает, что $\mathcal{U}_n/\mathcal{U}_{n-1} \cong \Lambda^{n-1}(\mathcal{U}_{n-1}^*)$. Поэтому формула для $p_1^*(E_d)$ упрощается:

$$p_1^*(E_d) = S^d(\mathcal{O} \oplus \mathcal{V}_1^* \otimes \Lambda^{n-1}(\mathcal{U}_{n-1}^*)) =$$

$$\mathcal{O} \oplus \mathcal{V}_1^* \otimes \Lambda^{n-1}(\mathcal{U}_{n-1}^*) \oplus ... \oplus (\mathcal{V}_1^* \otimes \Lambda^{n-1}(\mathcal{U}_{n-1}^*))^d.$$

Таким образом, $p_1^*(E_d)$ является суммой $d+1$ линейных расслоений, одно из которых тривиально. Несложно показать, что вышеуказанное разложение расслоения $p_1^*(E_d)$ в прямую сумму единственно с точностью до изоморфизма. Таким образом, первая часть леммы доказана.

Чтобы доказать вторую часть, достаточно заметить, что при малых d всякая гиперповерхность $\{s_d = 0\}$, проходящая через U, содержит прямые на $G(n, 2n)$, проходящие через точку U. Иными словами, сечение $p^*(s_d')$ обязано иметь нули на $F_n \times F_n$. В то же время, если бы сечение $p^*(s_d')$ не лежало в подрасслоении $p_1^* E_d/\mathcal{O}$, то оно не обращалось бы в ноль нигде, так как оно было бы суммой ненулевого сечения $\mathcal{O}$ и сечения $p_1^* E_d/\mathcal{O}$. Это завешает доказательство леммы. □

Вычисление классов Черна и не обращение в ноль

Будем обозначать через σ_k^u и σ_k^v классы вторых когомологий произведения пространств флагов $F(U) \times F(V)$.

Лемма 10. *Полный класс Черна расслоения $p_k^*(E_1)$ равен*

$$(1 + \sigma_{n-k+1}^u + \sigma_{k-1}^v)(1 + \sigma_{n-k}^u + \sigma_k^v).$$

Доказательство. $p_k^*(E_1)$ является суммой двух линейных расслоений:

$$p_k^*(E_1) = (\mathcal{U}_{n-k+1}/\mathcal{U}_{n-k})^* \otimes \Lambda^{n-k}\mathcal{U}_{n-k}^* \otimes \Lambda^{k-1}\mathcal{V}_{k-1}^* \oplus$$

$$\oplus (\mathcal{V}_k/\mathcal{V}_{k-1})^* \otimes \Lambda^{n-k}\mathcal{U}_{n-k}^* \otimes \Lambda^{k-1}\mathcal{V}_{k-1}^*.$$

Полный класс Черна первого из них вычисляется следующим образом:

$$1 + c_1(\mathcal{U}_{n-k+1}/\mathcal{U}_{n-k})^* + c_1(\Lambda^{n-k}\mathcal{U}^*_{n-k}) + c_1(\Lambda^{k-1}\mathcal{V}^*_{k-1}) =$$
$$1 + (\sigma^u_{n-k+1} - \sigma^u_{n-k}) + \sigma^u_{n-k} + \sigma^v_{k-1}.$$

Для второго расслоения вычисление аналогично, а полный класс Черна суммы двух расслоений равен произведению классов слагаемых. Это доказывает лемму. □

Следствие 2. *Старшие классы Черна расслоений* $p_k^*(E_d)$, $p_1^*(E_d)/\mathcal{O}$ *и* $p_n^*(E_d)/\mathcal{O}$ *имеют следующий вид:*

$$c_{d+1}(p_k^*(E_d)) = \Pi_{i=0}^d (i(\sigma^u_{n-k+1} + \sigma^v_{k-1}) + (d-i)(\sigma^u_{n-k} + \sigma^v_k)),$$
$$c_d(p_1^*(E_d)/\mathcal{O}) = d!(\sigma^u_{n-1} + \sigma^v_1)^d,$$
$$c_d(p_n^*(E_d)/\mathcal{O}) = d!(\sigma^u_1 + \sigma^v_{n-1})^d.$$

Доказательство. Первая формула следует непосредственно из леммы 10, а также следующей стандартной формулы:

$$c_{d+1}(S^d(L_1 \oplus L_2)) = \Pi_{i=0}^d (ic_1(L_1) + (d-i)c_1(L_2)).$$

Во второй и третьей формулах дополнительно используется, что $\sigma^u_n + \sigma^v_0 = \sigma^u_0 + \sigma^v_n$. □

Мы подошли к главному техническому утверждению.

Теорема 6. *Пусть* $d_1 + d_2 + ... + d_i < \frac{n}{4}$; *рассмотрим на* $F_n \times F_n$ *следующее расслоение:*

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^F_{d_1} \oplus ... \oplus \mathcal{E}^F_{d_i}.$$

Расслоение $\mathcal{E}$ *глобально порождено, расщепляется в сумму линейных, а расслоение* $\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}$ *имеет ненулевой старший класс Черна.*

Доказательство. Так как по лемме 9 каждое из слагаемых $\mathcal{E}^F_{d_k}$ глобально порождено и расщепляется в сумму линейных, то и само расслоение $\mathcal{E}$ обладает этими свойствами.

Докажем утверждение про старший класс Черна. Заметим, что из следствия 2 сразу вытекает, что старший класс Черна расслоения

$\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}$ является суммой мономов от σ_l^u и σ_m^v с положительными коэффициентами. А значит, из предложения 1 сразу следует, что достаточно доказать, что хотя бы один из мономов не обращается в ноль. Согласно следствию 1, достаточно найти такой моном, чтобы степень каждого входящего в него σ_l^u и σ_m^v была не больше, чем $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. В то же время, из формул следствия 2 несложно вывести, что в старшем классе Черна расслоения $\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}$ есть такие мономы, у которых степень при каждом σ_l^u и σ_m^v не больше, чем $2(\sum_i (d_i+1))$. А по условию теоремы $2\sum_i(d_i+1) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Таким образом, доказательство завершено. □

3.5. Доказательство теоремы 2

Наконец, приступаем к доказательству теоремы 2.

Пусть X является пересечением грассманиана $G(n, 2n)$ с набором гиперповерхностей $Y_1, ..., Y_i$ степеней $d_1, ..., d_i$. Покажем сначала, что для двух общих точек u и v на X пространство путей длины n, соединяющих их, непусто и связно.

Как мы объяснили, это пространство путей высекается из $F_n \times F_n$ нулями сечения расслоения $\mathcal{E}$. По теореме 6 расслоение $\mathcal{E}$ глобально порождено, расщепляется в сумму линейных, и старший класс Черна расслоения $\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}$ не равен нулю. Поэтому мы можем применить теорему 3, из которой выводим, что многообразие нулей любого сечения $\mathcal{E}$ непусто и связно. А значит, и многообразие путей непусто и связно.

Осталось доказать теорему в случае, если точки u и v не обязательно в общем положении. Для этого, рассмотрим пространство всех путей на X, начинающихся в u. Это пространство является неприводимым проективным многообразием, и имеется естественный морфизм из этого многообразия в X, сопоставляющий каждому пути его конечную точку. Так как множество точек v, соответствующих плоскостям, трансверсальным u, всюду плотно в X, то образ морфизма также всюду плотен. А так как пространство путей проективно, то морфизм доминантен. Итак, мы имеем доминантный морфизм из неприводимого многообразия в нормальное многообразие, и общий слой морфизма непуст и связен. Из факторизации Штейна следует, что все слои непусты и связны. Теорема доказана. □

3.6. Следствие из теоремы 2

Так же нам понадобится важное следствие из этой теоремы для случая полного пересечения грассманиана $G(k,n)$. Здесь мы будем полагать, что $k \leq [\frac{n}{2}]$.

Следствие 3. *Пусть X - полное пересечение грассманиана $G(k,n)$, вложенного по Плюккеру, с набором гиперповерхностей степеней $d_1,...,d_l$: $X = G(k,n) \cap \bigcap_{i=1}^{l} Y_i$. Если $2\sum_i (d_i+1) \leq \frac{k}{2} \leq [\frac{n}{4}]$, то многообразие $P_k(u,v)$ путей длины k, соединяющих любые две точки u,v в X, непусто и связно.*

Доказательство. Мы проведем доказательство для случая общих точек u,v грассманиана $G(k,n)$, в случае не общих точек доказательство производится тем же способом, что и доказательство теоремы 2.

Пусть U и V это k-мерные подпространства, соответствующие точкам u,v грассманиана $G(k,n)$. Для построения пути $p_k(u,v)$, соединяющего точки u, v грассманиана $G(k,n)$, рассмотрим грассманиан $G(k,2k) = G(k,U\oplus V)$ k-мерных подпространств в $2k$-мерном векторном пространстве $U\oplus V$. Заметим, что любой путь $p_k(u,v)$ длины k грассманиана $G(k,U\oplus V)$ содержится в грассманиане $G(k,n)$.

Не сложно понять, что любой путь $p_k(u,v)$ длины k из $G(k,n)$ содержится в грассманиане $G(k,U\oplus V)$. Так все пути $p_k(u,v)$ длины k, соединяющие две точки u и v в X, содержатся в $G(k,U\oplus V)$.

Теперь рассмотрим пересечение $G(k,U\oplus V)\cap\bigcap_{i=1}^{l} Y_i \subset X$. По теореме 2 пространство путей $P_k(u,v)$ пересечения $G(k,U\oplus V)\cap \bigcap_{i=1}^{l} Y_i$ непусто и связно. Из этого следует, что и пространство путей $P_k(u,v)$ в X непусто и связно. $\square$

4. Равномерность векторных расслоений на полном пересечении в инд-грассманиане

Начнем с необходимых определений.

Определение 9. *Назовем векторное расслоение* $\mathbf{E}$ ***линейно тривиальным****, если ограничение* $\mathbf{E}$ *на любую проективную прямую из* $\mathbf{X}$ *тривиально.*

Хорошо известно, что линейно тривиальное расслоение на $\mathbb{P}^k$, а значит и на $\mathbf{P}^\infty$, тривиально ([15], Chapter 1, §3, Theorem 3.2.1).

Определение 10. *Пусть* $\mathbf{E}$ *- расслоение ранга* r *на линейном инд-многообразии* $\mathbf{X}$*.* ***Тип расщепления*** *расслоения* $\mathbf{E}$ *на проективной прямой* $l \subset \mathbf{X}$ *- это набор чисел* $r_i > 0$ *и* $a_i \in \mathbb{Z}$*,* $i = 1, ..., s$*, такой, что*

$$\mathbf{E}|_l \cong r_1\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_1) \oplus r_2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_2) \oplus \ldots r_s\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_s)$$

и $a_1 > a_2 > ... > a_s$*,* $\sum_{i=1}^s r_i = r$*.*

Расслоение $\mathbf{E}$ *называется* ***равномерным****, если его ограничение на все проективные прямые имеет одинаковый тип расщепления.*

Основным результатом данной главы является следующая теорема.

Теорема 7. *Всякое конечномерное векторное расслоение* $\mathbf{E}$ *на полном пересечении* $\mathbf{X}$ *конечной коразмерности в линейном инд-грассманиане* $\mathbf{G}$ *равномерно.*

4.1. Вспомогательные определения и идея доказательства

Нам потребуется следующие определения.

Определение 11. *Линейное инд-многообразие* $\mathbf{X}$ *назовем* 1**-связным***, если для любых двух точек* $x, y \in \mathbf{X}$ *существует связная цепочка проективных прямых* $l_1, ..., l_k$ *в* $\mathbf{X}$*, соединяющая* x *с* y*.*

Назовем $\mathbf{X}$ 2**-связным**, *если любые две прямые из* $\mathbf{X}$ *могут быть связаны такой цепочкой прямых* $l_1, ..., l_k$, *что любая пара* (l_i, l_{i+1}) *содержится в плоскости* $\mathbb{P}^2$, *принадлежащей* $\mathbf{X}$.

Определение 1-связности и 2-связности так же верно и для многообразий.

Теорема 7 является простым следствием следующего результата:

Теорема 8. *Полное пересечение* $\mathbf{X}$ *конечной коразмерности в линейном инд-грассманиане* $\mathbf{G}$ 2*-связно.*

Таким образом, необходимо доказать, что $\mathbf{X}$ является 2-связным. Опишем кратко шаги доказательства этого факта.

Пусть x, y две точки на $\mathbf{X}$. Построим *путь*, состоящий из цепочки таких прямых на $\mathbf{X}$, соединяющих x и y, что любые две соседние прямые из этой цепочки лежат в некоторой проективной плоскости $\mathbb{P}^2 \subset \mathbf{X}$. Такой путь мы получим как результат следующих трех последовательных аппроксимаций.

Первая аппроксимация. Вначале построим цепочку из проективных подпространств $\mathbb{P}^n$ в $\mathbf{G}$, соединяющую точки x и y. В этой цепочке по определению любые два последовательных подпространства $\mathbb{P}^n$ пересекаются и лежат в $\mathbf{G}$. Однако эти подпространства не обязаны лежать и, тем более, пересекаться в $\mathbf{X}$, так что пересечение полученной цепочки подпространств с $\mathbf{X}$ может быть несвязным. Число n будет выбрано таким, чтобы пересечение каждого $\mathbb{P}^n$ из этой цепочки с инд-многообразием $\mathbf{X}$ было 1-связным.

Вторая аппроксимация. Далее мы покажем, что для любых двух соседних подпространств $\mathbb{P}^{n_a}$ и $\mathbb{P}^{n_b}$ из цепочки любые две точки $x \in \mathbb{P}^{n_a} \cap \mathbf{X}$ и $y \in \mathbb{P}^{n_b} \cap \mathbf{X}$ можно соединить цепочкой прямых, лежащих в $\mathbf{X}$. Отсюда будет следовать, что $\mathbf{X}$ 1-связно.

Третья (веерная) аппроксимация. Наконец, покажем, что для любых двух соседних прямых l, l' из цепочки, пересекающихся в некоторой точке z, найдется набор прямых $l = l_1, l_2, ..., l_{m-1}, l_m = l'$, проходящих через z, таких, что для всякого i прямые l_i, l_{i+1} лежат в некоторой плоскости $\mathbb{P}^2 \subset \mathbf{X}$. Вставив такой "веер" прямых между каждой последовательной парой прямых из цепочки, мы получим окончательный результат.

Приступим теперь к формулировке и доказательству теорем.

4.2. Доказательство 1-связности X

Теорема 9. *Полное пересечение* $\mathbf{X}$ *конечной коразмерности в линейном инд-грассманиане* $\mathbf{G}$ 1*-связно.*

Эта теорема является простым следствием основного результата статьи [2]. Мы докажем эту теорему здесь более простым методом, который так же поможет доказать теорему 8. Теорема 9 совмещает в себе первые две аппроксимации, описанные выше. Ее доказательство опирается на несколько утверждений.

Теорема 10. *Для любой пары натуральных чисел* (k,d) *и* $n \geq 2kd$ *всякое проективное многообразие* X *в* $\mathbb{P}^n$*, все неприводимые компоненты которого имеют коразмерность не больше* k *и степень не больше* d*, является* 1*-связным.*

Доказательство. Мы докажем более сильное утверждение. А именно, что при $n \geq 2kd$ для любых двух точек x, y в $X \subset \mathbb{P}^n$ существуют пересекающиеся прямые l_x и l_y, лежащие в X и содержащие x и y соответственно. Достаточно доказать утверждение теоремы для общих точек $x, y \in X$, так что мы будем предполагать, что эти точки - гладкие в X. Требуемое утверждение будет вытекать из следующей леммы.

Лемма 11. *Пусть* X *- неприводимое подмногообразие в* $\mathbb{P}^n$ *коразмерности* k *и степени* d*, а* $x \in X$ *- гладкая точка. Тогда размерность подмногообразия* $L(x) \subset X$*, заметаемого прямыми, проходящими через* x*, не меньше* $n - dk$*.*

Доказательство. Эта лемма стандартна. Дадим набросок ее доказательства. Покажем сначала, что лемму можно свести к случаю гиперповерхностей. А именно, покажем, что в некоторой окрестности точки x многообразие X можно задать пересечением k гиперповерхностей степени d. Действительно, выберем в $\mathbb{P}^n$ k общих подпространств $\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_k$ размерности $k-2$. Условие общности состоит в том, что нет проективных прямых в $\mathbb{P}^n$, которые пересекают одновременно касательную проективную плоскость $\mathbb{P}_x X$ и все подпространства $\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_k$. Обозначим через

H_i гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$, являющуюся конусом над X с центром в $\mathbb{P}_i$. Легко понять, что H_i имеет степень d, и, более того, в точке x гиперповерхности $H_1, ..., H_k$ трансверсальны и гладки. Трансверсальность следует из условия общности набора подпространств $\mathbb{P}_1, ..., \mathbb{P}_k$. А так как $X \subset H_1 \cap ... \cap H_k$, и многообразие $H_1 \cap ... \cap H_k$ гладко в x, мы выводим, что неприводимая компонента $H_1 \cap ... \cap H_k$, проходящая через x, совпадает с неприводимой компонентой X, проходящей через x ([7], Глава II, §2). Итак, теперь мы можем считать, что X является гиперповерхностью степени d.

Рассмотрим теперь аффинную окрестность U_x точки x, где X задается уравнением $F = 0$. Положим $x = 0$, и рассмотрим разложение $F = F_1 + ... + F_d$, где F_i - однородный многочлен степени i от аффинных координат в U_x. Понятно, что многообразие $F_1 = ... = F_d = 0$ заметается прямыми, проходящими через $x = 0$. Его коразмерность не больше d, так что лемма доказана. $\square$

Пусть теперь $x, y \in X$ - гладкие точки. Тогда из леммы следует, что $\dim(L(x)) + \dim(L(y)) \geq n$, а значит $L(x) \cap L(y) \neq \emptyset \in \mathbb{P}^n$, то есть x и y можно соединить цепочкой из двух прямых. $\square$

Предложение 2. *Пусть $\mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^m$ вложено по Сегре в $\mathbb{P}^{(l+1)(m+1)-1}$. Выберем натуральные числа (k, d) такие, что $2kd < l$, $2kd < m$. Тогда для всякого многообразия Y в $\mathbb{P}^{(l+1)(m+1)-1}$, все неприводимые компоненты которого имеют коразмерность не больше k и степень не больше d, многообразие $Y \cap \mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^m$ является 1-связным.*

Вложение Сегре определено, например, в ([19], Chapter 5, §5.3).

Доказательство. Обозначим через Z пересечение $Y \cap \mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^m$. Обозначим через p_1, p_2 проекции Z на $\mathbb{P}^l$ и $\mathbb{P}^m$. Пусть (x_1, y_1) и (x_2, y_2) - любые две точки в Z. Покажем, что их можно соединить цепочкой прямых.

Рассмотрим слои $p_1^{-1}(x_1)$ и $p_1^{-1}(x_2)$. По соображениям размерности многообразия $p_2(p_1^{-1}(x_1))$ и $p_2(p_1^{-1}(x_2))$ пересекаются в $\mathbb{P}^m$. Пусть y - это одна из точек пересечения, тогда точки (x_1, y) и (x_2, y) лежат в Z.

Из теоремы 10 следует, что слои проекций $p_1 : Z \to \mathbb{P}^l$ и $p_2 : Z \to \mathbb{P}^m$ 1-связны. Пары точек $((x_1, y_1), (x_1, y))$ и $((x_2, y_2), (x_2, y))$ лежат в слоях проекции p_1, а пара точек $((x_1, y), (x_2, y))$ лежит в слое проекции p_2. Поэтому (x_1, y_1) и (x_2, y_2) можно связать цепочкой прямых, проходящей через (x_1, y) и (x_2, y). □

Следующее утверждение является непосредственным следствием предложения.

Следствие 4. *Пусть $\mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^m$ вложено по Сегре в $\mathbb{P}^{(l+1)(m+1)-1} \subset \mathbb{P}^{(l+1)(m+1)}$. Рассмотрим конус $C \subset \mathbb{P}^{(l+1)(m+1)}$ над многообразием Сегре. Выберем натуральные числа (k, d) такие, что $2kd < l$, $2kd < m$. Тогда для всякого многообразия Y в $\mathbb{P}^{(l+1)(m+1)}$, все неприводимые компоненты которого имеют коразмерность не больше k и степень не больше d, многообразие $Y \cap C$ является 1-связным.*

Доказательство. Действительно, пусть x, y - две точки на $Y \cap C$. Будем считать, что эти точки общие, в частности, прямая, проходящая через x и y, не проходит через вершину конуса. Пересечем $Y \cap C$ гиперплоскостью H, проходящей через x и y и не содержащей вершину конуса. Так как $C \cap H$ - многообразие Сегре, то пересечение $Z = Y \cap (C \cap H)$ будет многообразием, описанным в предложении 2, которое является 1-связным согласно предложению. □

Наконец, нам понадобится еще одна лемма.

Лемма 12. *Для любого m и любых двух точек x, y на $\mathbf{G}$ существует цепочка проективных подпространств $\mathbb{P}^m$ на $\mathbf{G}$, соединяющая x и y, в которой любые два последовательных подпространства пересекаются.*

Доказательство. Это следует из того, что грассманиан $G(k, n)$ 1-связен: на $G(k, n)$ любые две точки можно связать цепочкой из $\min(k, n-k)$ прямых, см. [2]. В то же время, любая прямая на $G(k, n)$ лежит в некоторых подпространствах $\mathbb{P}^{k-1}$ и $\mathbb{P}^{n-k-1}$, ([6], Часть 1, Лекция 6, Упражнение 6.9). □

Доказательство теоремы 9. Приступим к доказательству того, что $\mathbf{X}$ 1-связно. Пусть $d_1, ..., d_l$ - степени инд-гиперповерхностей $\mathbf{Y}_1, ..., \mathbf{Y}_l$, и пусть $\mathbf{Y} = \cap_{i=1}^{l} \mathbf{Y}_i$. Согласно многомерной теореме Безу ([21], Chapter I, §7, Theorem

7.7) для всякого проективного подпространства $\mathbb{P}^n$ ($n > l$) все неприводимые компоненты пересечения $\mathbb{P}^n \cap \mathbf{Y}$ имеют степень не больше $d = d_1 \cdot ... \cdot d_l$. Кроме того, коразмерность всех этих компонент в $\mathbb{P}^n$ не больше l. Положим $N = 2ld_1 \cdot ... \cdot d_l$.

Пусть x и y - две точки на $\mathbf{X}$. Наша цель - построить цепочку прямых на $\mathbf{X}$, соединяющую x и y. Согласно лемме 12 существует цепочка из линейных проективных подпространств $\mathbb{P}^N_1, ...\ \mathbb{P}^N_i$, лежащих на $\mathbf{G}$, соединяющая x и y. Пусть точки $x = x_1, x_2, ..., x_{i+1} = y$ на $\mathbf{G}$ являются вершинами этой цепочки (то есть $\mathbb{P}^N_j$ содержит x_j и x_{j+1}, $j = 1, ...i$, $1 < j < i$). Напомним, что при этом точки x_j для $j \neq 1$ и $j \neq i+1$ не обязаны лежать в $\mathbf{X}$.

Согласно теореме 10 для всякого j пересечение $\mathbb{P}^N_j \cap \mathbf{Y}$ является 1-связным. Таким образом, для построения цепочки проективных прямых, идущей от $x = x_1$ до $x_{i+1} = y$, достаточно показать, что для всякого j существует цепочка прямых, соединяющая какую-нибудь точку из $\mathbb{P}^N_j \cap \mathbf{Y}$ с какой-нибудь точкой из $\mathbb{P}^N_{j+1} \cap \mathbf{Y}$. Выведем последний факт из следствия 4.

Рассмотрим объединение $\mathbf{C}_{j+1}$ всех прямых на $\mathbf{G}$, проходящих через точку x_{j+1}. Это объединение является конусом над произведением $\mathbf{P}^\infty \times \mathbf{P}^\infty$, вложенным по Сегре. Безусловно, оба пространства $\mathbb{P}^N_j$ и $\mathbb{P}^N_{j+1}$ лежат в $\mathbf{C}_{j+1}$. По следствию 4 пространство $\mathbf{C}_{j+1} \cap \mathbf{Y}$ является 1-связным, следовательно, любую пару точек из $\mathbb{P}^N_j \cap \mathbf{Y}$ и $\mathbb{P}^N_{j+1} \cap \mathbf{Y}$ можно соединить цепочкой прямых, лежащих в $\mathbf{C}_{j+1} \cap \mathbf{Y}$. $\square$

4.3. Доказательство 2-связности X

Из теоремы 9 выведем теорему 8.

Доказательство теоремы 8. Чтобы доказать, что $\mathbf{X}$ 2-связно, заметим, что для любых двух прямых l, l' на $\mathbf{X}$, пересекающихся в точке x, найдется набор прямых $l = l_1, l_2, ..., l_{n-1}, l_n = l'$, проходящих через x, таких, что для всякого i прямые l_i, l_{i+1} лежат в плоскости $\mathbb{P}^2$, содержащейся в $\mathbf{X}$. Это утверждение эквивалентно тому, что база семейства прямых, проходящих через $x \in \mathbf{X}$, 1-связна, и вытекает из предложения 2. Действительно, база семейства прямых, проходящих через $x \in \mathbf{X}$, является пересечением вложенного по Сегре $\mathbf{P}^\infty \times \mathbf{P}^\infty$ с базой семейства прямых, проходящих через x на $\mathbf{Y}$, а последняя база имеет конечную коразмерность и степень.

Таким образом, всякую цепочку прямых на $\mathbf{X}$ можно дополнить, вставив веер прямых в каждую вершину цепочки. Это доказывает 2-связность. □

4.4. Доказательство равномерности расслоения E

Наконец, чтобы доказать теорему 7, нам потребуется некоторая информация о схемах Фано (см. [8]) полных пересечений в $\mathbb{P}^n$. Мы докажем следующую лемму и следствия из нее.

Лемма 13. *Пусть $Y_1, ..., Y_l$ - гиперповерхности степеней $d_1, ..., d_l$ в $\mathbb{P}^n$. Пусть $Y = Y_1 \cap ... \cap Y_l$ и $\mathbb{P}^k$ - подпространство в Y. Тогда если*

$$n - k - 1 > \sum_{i=1}^{l} \binom{d_i + k}{d_i - 1},$$

то существует подпространство $\mathbb{P}^{k+1} \subset Y$ такое, что $\mathbb{P}^k \subset \mathbb{P}^{k+1}$.

Доказательство. Понятно, что достаточно доказать лемму для случая, когда Y является гиперповерхностью степени d.

Введем на $\mathbb{P}^n$ координаты $(x_0 : ... : x_k : x_{k+1} : ... : x_n)$ так, что $\mathbb{P}^k$ задается системой уравнений $x_{k+1} = ... = x_n = 0$. Все $(k+1)$-мерные подпространства, которые содержат $\mathbb{P}^k$, заметают проективное подпространство $\mathbb{P}^{n-k-1}$. При этом $(x_{k+1} : ... : x_n)$ - однородные координаты в $\mathbb{P}^{n-k-1}$.

Пусть теперь некоторый многочлен f_d степени d от $(x_0 : ... : x_n)$ обращается в ноль на $\mathbb{P}^k$. Мы докажем, что f_d обнуляется также на некотором подпространстве $\mathbb{P}^{k+1}$, содержащем $\mathbb{P}^k$.

Обозначим через $I = (i_0, ..., i_k) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$ набор неотрицательных чисел, удовлетворяющих условию $0 \le \sum_j i_j \le d - 1$. Тогда можно записать f_d в следующем виде:

$$f_d = \sum_{I=(i_0,...,i_k)} x_0^{i_0}...x_k^{i_k} f_I(x_{k+1},...,x_n),$$

где f_I - однородный многочлен степени $d - \sum_j i_j$ от $(x_{k+1} : ... : x_n)$.

Наконец, рассмотрим в $\mathbb{P}^{n-k-1}$ пересечение $\binom{d+k}{d-1}$ гиперповерхностей с уравнениями $f_I = 0$. Пересечение непусто, так как $n-k-1 > \binom{d+k}{d-1}$.

Понятно, что линейная оболочка подпространства $\mathbb{P}^k$ и любой точки в пересечении этих гиперповерхностей дает искомое подпространство $\mathbb{P}^{k+1}$. $\square$

Из этой леммы, используя индукцию, получаем следствие.

Следствие 5. *Пусть* $\mathbf{Y_1},...,\mathbf{Y_l}$ *- инд-гиперповерхности степеней* $d_1,...,d_l$ *в* $\mathbf{P}^\infty$. *Пусть* $\mathbf{Y} = \mathbf{Y_1} \cap ... \cap \mathbf{Y_l}$, *и* $\mathbb{P}^k$ *- подпространство в* Y. *Тогда существует такое проективное инд-пространство* $\mathbf{P}^\infty \subset \mathbf{Y}$, *что* $\mathbb{P}^k \subset \mathbf{P}^\infty$.

Доказательство этого следствия очевидно. Из следствия 5 вытекает следующее утверждение.

Следствие 6. *Для всякой проективной плоскости* $\mathbb{P}^2 \subset \mathbf{X}$ *существует* $\mathbf{P}^\infty \subset \mathbf{X}$ *такое, что выполнено* $\mathbb{P}^2 \subset \mathbf{P}^\infty$. *В частности, всякое конечномерное расслоение* $\mathbf{E}$ *на* $\mathbf{X}$ *расщепляется при ограничении на любую плоскость* $\mathbb{P}^2 \subset \mathbf{X}$.

Доказательство. Первое утверждение следует непосредственно из следствия 5. Действительно, всякая плоскость $\mathbb{P}^2 \subset \mathbf{X}$ лежит в некотором $\mathbf{P}^\infty$ в $\mathbf{G}$.

Второе утверждение следует из первого по теореме Барта, Ван де Вена [9] и Тюрина [20]. $\square$

Теперь перейдем к доказательству равномерности расслоения $\mathbf{E}$ на инд-многообразии $\mathbf{X}$.

Доказательство теоремы 7. Любые две прямые на $\mathbf{X}$ можно соединить цепочкой плоскостей $\mathbb{P}^2$, лежащих в $\mathbf{X}$, в которой соседние $\mathbb{P}^2$ пересекаются по прямой. По следствию 6 расслоение

$\mathbf{E}$ расщепляется на всякой плоскости $\mathbb{P}^2 \subset \mathbf{X}$, поэтому на всякой плоскости $\mathbb{P}^2$ расслоение $\mathbf{E}$ имеет одинаковый тип расщепления при ограничении на все прямые в плоскости $\mathbb{P}^2$. Отсюда вытекает утверждение теоремы. $\square$

5. Расщепление векторных расслоений конечного ранга на $\mathbf{X}$

В этой главе мы приведем доказательство главной теоремы.

Для начала дадим краткий план доказательства теоремы 1.

1. Мы докажем, что в векторном расслоении $\mathbf{E}$ есть флаг подрасслоений $0 = \mathbf{F_0} \subset \mathbf{F_1} \subset \mathbf{F_2} \subset \dots \subset \mathbf{F_s} = \mathbf{E}$, таких, что каждое из фактор-расслоений $\mathbf{F_i}/\mathbf{F_{i-1}}$ является подкруткой линейно тривиального расслоения на $\mathcal{O}(a_i)$ для $1 \leq i \leq s$.

2. Затем мы докажем, что любое конечномерное линейно тривиальное расслоение на $\mathbf{X}$ является тривиальным.

3. Наконец, докажем, что расслоение $\mathbf{E}$ расщепляется в сумму $\oplus_i \mathbf{F_i}/\mathbf{F_{i-1}}$. Здесь мы будем пользоваться теоремой Кодаиры об обращении в ноль.

5.1. Построение флага подрасслоений в $\mathbf{E}$

В этой главе мы построим флаг подрасслоений в векторном расслоении $\mathbf{E}$ конечного ранга r на полном пересечении $\mathbf{X} \subset \mathbf{G}$ конечной коразмерности.

Прежде чем делать это формально, мы опишем главную идею.

Выберем точку $x \in \mathbf{X}$ и рассмотрим слой $\mathbf{E}_x$ расслоения $\mathbf{E}$ над x.

Для всякой проективной прямой l, проходящей через x, по теореме Гротендика ([15], Chapter 1, §2, Theorem 2.1.1) в ограничении $\mathbf{E}|_l$ имеется канонический флаг подрасслоений $0 = \mathbf{F}_0 \subset \mathbf{F}_1 \subset \dots \subset \mathbf{F}_s = \mathbf{E}|_l$.

Таким образом, в $\mathbf{E}_x$ возникает флаг подпространств, который мы обозначим $\mathbf{F}(x, l)$. Априори флаг $\mathbf{F}(x, l)$ может зависеть от прямой l, проходящей через x, но мы докажем, что этого не происходит.

Пусть $B_m(x)$ - *база семейства прямых* на X_m, проходящих через x, рассматриваемая как приведенная схема. Мы покажем, что отображение из $B_m(x)$ в пространство флагов $\mathbf{E}_x$, сопоставляющее прямой $l \subset B_m(x)$ флаг $\mathbf{F}(x, l)$, является морфизмом для всякого m. После чего мы воспользуемся следующей теоремой.

Теорема 11. *Для любого d существует такое число $M := M(d)$, что для всякого $m > M$ всякий морфизм из $B_m(x)$ в проективное многообразие размерности меньшей d постоянен.*

Доказательство теоремы 11

Начнем с анализа базы $B_m(x)$. Напомним, что для $i = 1, ..., l$ число $\deg Y_{i,m} = d_i$, $m \geq 1$, обозначает степень гиперповерхности $Y_{i,m}$. Обозначим $\mathbb{P}_x^{N_m-2}$ проективизированное касательное пространство в точке x к плюккеровому пространству $\mathbb{P}^{N_m-1}$.

Предложение 3. *$B_m(x)$ задается пересечением $\mathbb{P}^{k_m-1} \times \mathbb{P}^{n_m-k_m-1}$ с $\sum_i d_i$ гиперповерхностями из $\mathbb{P}_x^{N_m-2}$, степени которых не больше $\max_i(d_i)$.*

Доказательство. База семейства прямых, проходящих через точку x на грассманиане $G(k_m, n_m)$, есть $\mathbb{P}^{k_m-1} \times \mathbb{P}^{n_m-k_m-1}$. Поэтому достаточно доказать, что для всякого i множество прямых, лежащих на $Y_{i,m}$ и проходящих через x, является пересечением d_i гиперповерхностей в $\mathbb{P}_x^{N_m-2}$.

Введем однородные координаты $(z_0 : z_1 : ...)$ на $\mathbb{P}^{N_m-1}$. Пусть $x = (1 : 0 : .. : 0)$, тогда $(z_1 : z_2 : ...)$ это однородные координаты на $\mathbb{P}_x^{N_m-2}$. Запишем уравнение гиперповерхности $Y_{i,m}$ в виде

$$F = F_{d_i}(z_1 : z_2 : ...) + z_0 F_{d_i-1}(z_1 : z_2 : ...) + ... + z_0^{d_i-1} F_1(z_1 : z_2 : ...) = 0,$$

тогда многообразие прямых из $Y_{i,m}$, проходящих через x, задается в $\mathbb{P}_x^{N_m-2}$ системой d_i уравнений

$$F_{d_i}(z_1 : z_2 : ...) = F_{d_i-1}(z_1 : z_2 : ...) = ... = 0$$

степеней $d_i, d_i - 1, ..., 1$ соответственно. Это доказывает наше утверждение. □

Доказательство теоремы 11. Заметим, что для любого d существует такое число M, что для всякого $m > M$ выполняются следующие два условия:

1) Многообразие $B_m(x)$ является 1-связным. Это следует из предложения 2 вместе с предложением 3.

2) Всякая проективная прямая на $B_m(x)$ содержится в проективном подпространстве $\mathbb{P}^d \subset B_m(x)$ размерности d. Это следует из леммы 13.

Из условий 1) и 2) следует, что всякое отображение из $B_m(x)$ в любое многообразие размерности меньше d будет отображением в точку. Действительно, всякая прямая из $B_m(x)$ отобразится в точку, так как содержится в некотором $\mathbb{P}^d$ (которое, в свою очередь, отобразится в точку) ([21], Chapter II, § 7, ex. 7.3.(a)). А так как любые две точки на $B_m(x)$ связаны цепочкой прямых, то и все $B_m(x)$ отобразится в точку. $\square$

Стандартна лемма

Начнем со стандартного факта.

Лемма 14. *Пусть X, Y, Z - проективные многообразия и Y гладко. Пусть даны сюрьективный морфизм $p : X \to Y$ и морфизм $\pi : X \to Z$ такие, что слои морфизма p лежат в слоях морфизма π. Тогда существует такой морфизм $f : Y \to Z$, что $f \circ p = \pi$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \arrow[dl, dashed, "f"] \\ Z & \end{tikzcd}$$

Доказательство. Рассмотрим отображение $\phi : X \to Y \times Z$, $\phi(x) = (p(x), \pi(x))$ и обозначим через p', π' проекции многообразия $Y \times Z$ на Y и Z соответственно.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\phi"] & Y \\ Z & Y \times Z \arrow[l, "\pi'"] \arrow[u, "p'"'] \end{tikzcd}$$

Заметим, что проекция $p' : \phi(X) \to Y$ является изоморфизмом

([7], глава II, § 4, теорема 2), так как проекция p' является биективным морфизмом и по условиям леммы Y гладко. Искомый морфизм $f: Y \to Z$ задается композицией $f = \pi' \circ p'^{-1}$. $\square$

Выделение флага подрасслоений в расслоении $\mathbf{E}$ на X_m

Теперь мы начнем выделение флага подрасслоений. Пусть B_m база семейства прямых на X_m. Рассмотрим график инцидентности

$$\Gamma_m = \{(x,l) \in X_m \times B_m | x \in l\},$$

как приведенную схему. Обозначим $p_m : \Gamma_m \to X_m$, где морфизм $p_m : (x,l) \mapsto x$.

Напомним, что $\mathbf{E}|_{X_m} = E_m$, ранг расслоения E_m равен r. Слой над каждой точкой $x \in X_m$ будем обозначать $E_m(x)$.

Согласно теореме 7 расслоение E_m равномерно. Значит, для любой прямой $l \in B_m$ имеем одинаковый тип расщепления

$$E_m|_l = r_1\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_1) \oplus r_2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_2) \oplus ... \oplus r_s\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_s),$$

$$a_1 > a_2 > ... > a_s, \sum_{i=1}^{s} r_i = r,$$

r_i и a_i не зависят от выбора прямой.

Теорема 12. *Пусть* $\mathbf{X} = \varinjlim X_m$ *- полное пересечение коразмерности* l *в линейном инд-грассманиане* $\mathbf{G}$. *Для* $\forall m \geq 1$ *и расслоения* E_m *на* X_m *существует цепочка подрасслоений*

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_s = E_m$$

таких, что для любой прямой $l \in B_m$

$$F_i|_l = r_1\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_1) \oplus \ldots \oplus r_i\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i), \; 1 \leq i \leq s.$$

Доказательство. Достаточно доказать это утверждение для m больших константы $M(\frac{r^2}{4})$ из теоремы 11. Обозначим $E_{(1)} := E_m$. Пусть

$$\mathfrak{Gr}(r_1, E_{(1)}) = \bigcup_{x \in X_m} G(r_1, E_{(1)}(x))$$

- грассманизация расслоения $E_{(1)}$, с естественной проекцией $\varphi_1 : \mathfrak{Gr}(r_1, E_{(1)}) \to X_m$, где $\varphi_1 : (x, V^{r_1}) \mapsto x$, V^{r_1} - r_1-мерное векторное подпространство в $E_{(1)}(x)$. Нашей задачей будет являться построение сечения $f_1 : X_m \to \mathfrak{Gr}(r_1, E_{(1)})$ расслоения φ_1.

Рассмотрим морфизм $\pi_1 : \Gamma_m \to \mathfrak{Gr}(r_1, E_{(1)})$, где $\pi_1 : (x, l) \mapsto (x, r_1 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_1)|_x)$.

Покажем, что слои морфизма $p_m : (x, l) \mapsto x$ лежат в слоях морфизма π_1. Действительно, для каждой точки $x \in X_m$ слой $p_m^{-1}(x)$ морфизма p_m изоморфен базе семейства прямых на X_m, проходящих через x. Морфизм π_1 отображает $p_m^{-1}(x)$ в $\mathfrak{Gr}(r_1, E_{(1)}(x))$, и это отображение является отображением в точку по теореме 11, так как $\dim \mathfrak{Gr}(r_1, E_{(1)}(x)) < \frac{r^2}{4}$.

Рассмотрим диаграмму:

$$\begin{tikzcd} \Gamma_m \arrow[r, "p_m"] \arrow[d, "\pi_1"'] & X_m \arrow[dl, dashed, "f_1"'] \\ \mathfrak{Gr}(r_1, E_{(1)}) \arrow[ur, bend right, "\varphi_1"'] & \end{tikzcd}$$

Существование сечения f_1 проекции φ_1 следует из леммы 14, в которой мы полагаем $X = \Gamma_m$, $Y = X_m$, $Z = \mathfrak{Gr}(r_1, E_{(1)})$, $p = p_m$, $\pi = \pi_1$.

Обозначим через $\mathfrak{S}_{r_1}$ тавтологическое r_1-мерное подрасслоение в $\varphi_1^* E_{(1)}$. Применяя к мономорфизму расслоений

$$\tau_1 : \mathfrak{S}_{r_1} \longrightarrow \varphi_1^* E_{(1)}$$

функтор f_1^*, получим мономорфизм расслоений

$$f_1^* \tau_1 : f_1^* \mathfrak{S}_{r_1} \to E_{(1)}.$$

Обозначим $E_{(2)} = E_{(1)} / f_1^* \mathfrak{S}_{r_1}$, и рассмотрим грассманизацию

$$\mathfrak{Gr}(r_2, E_{(2)}) = \bigcup_{x \in X_m} G(r_2, E_{(2)}(x))$$

расслоения $E_{(2)}$.

Имеем диаграмму

$$\begin{tikzcd} \Gamma_m \arrow[r, "p_m"] \arrow[d, "\pi_2"'] & X_m \arrow[dl, dashed, "f_2"'] \\ \mathfrak{Gr}(r_2, E_{(2)}) \arrow[ur, bend right, "\varphi_2"'] & \end{tikzcd},$$

в которой существование морфизма f_2 следует из леммы 14, по той же причине, что и существование морфизма f_1. Рассуждая, как и выше, получим вложение

$$f_2^*\tau_2 : f_2^*\mathfrak{S}_{r_2} \rightarrowtail E_{(2)}.$$

Обозначим

$$E_{(3)} = E_{(2)}/_{f_2^*\mathfrak{S}_{r_2}}.$$

Повторяя предыдущие действия, получим последовательность эпиморфизмов расслоений:

$$E_{(1)} \twoheadrightarrow E_{(2)} \twoheadrightarrow \ldots \twoheadrightarrow E_{(s+1)},$$

которой соответствует последовательность подрасслоений в $E_{(1)}$:

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_s = E_{(1)}$$

таких, что для любой прямой $l \in B_m$

$$F_i|_l \cong r_1\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_1) \oplus \ldots \oplus r_i\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i),\ 1 \leq i \leq s.$$

$\square$

Следствие 7. *Всякое расслоение F_i/F_{i-1} является подкруткой линейно тривиального расслоения на линейное расслоение $\mathcal{O}_{X_m}(a_i)$.*

Действительно, из построения цепочки подрасслоений расслоения E_m следует, что ограничение F_i/F_{i-1} на любую прямую $l \in B_m$ равно $r_i\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)$ для $1 \leq i \leq s$. Это то же самое, что и линейная тривиальность расслоения $F_i/F_{i-1} \otimes \mathcal{O}_{X_m}(-a_i)$.

Замечание 2. *В теореме 12 подрасслоения F_i расслоения E_m определены однозначно. Это следует из того, что всякое векторное расслоение E на проективной прямой $\mathbb{P}^1$ имеет канонически определенную фильтрацию $0 = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_s = E_m$ такую, что F_i/F_{i-1} изоморфно $r_i\mathcal{O}_{X_m}(a_i)$, где $a_1 > a_2 > \ldots > a_s$.*

Используя независимость флага подрасслоений $0 = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_s$, построенного в теореме 12, от m и линейность инд-многообразия $\mathbf{X} = \varinjlim X_m$ мы получаем следующее следствие из теоремы 12.

Теорема 13. *Пусть $\mathbf{X}$ - полное пересечение в линейном инд-грассманиане $\mathbf{G}$, $\mathbf{E}$ - равномерное расслоение на $\mathbf{X}$. Тогда существует цепочка подрасслоений*

$$0 = \mathbf{F_0} \subset \mathbf{F_1} \subset \ldots \subset \mathbf{F_s} = \mathbf{E}$$

таких, что каждое фактор-расслоение $\mathbf{F_i}/\mathbf{F_{i-1}}$ для $1 \leq i \leq s$ является подкруткой линейно тривиального расслоения.

5.2. Линейно тривиальное расслоение тривиально

Целью данного параграфа является доказательство теоремы, которая дает критерий тривиальности линейно тривиальных расслоений на 1-связных многообразиях с дополнительными условиями (смотри теорему 14).

Пусть X - нормальное проективное многообразие, E - векторное расслоение на нем. Пусть Y - база семейства прямых на X. Пусть $Z \subset Y \times X$ - универсальная прямая. Обозначим π и p проекции из Z в Y и в X соответственно. Отметим, что $\pi : Z \to Y$ есть $\mathbb{P}^1$-расслоение. Рассмотрим схему

$$Z_1 = Z \times_Y Z.$$

Она параметризует прямые на X с парой выделенных точек на них. Пусть $p_1, p_2 : Z_1 \to X$ - композиции проекций $p_{r_1}, p_{r_2} : Z_1 \to Z$ с отображением $p : Z \to X$. Далее мы определим индуктивно многообразие

$$Z_{n+1} = Z_n \times_X Z_1,$$

с проекциями $p_1 : Z_1 \to X$ и $p_{n+2} : Z_{n+1} \to X$, посредством диаграммы.

$$\begin{tikzcd}
 & & Z_{n+1} \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[ddll, bend right, "p_1"'] \arrow[ddrr, bend left, "p_{n+2}"] & & \\
 & Z_n \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_{n+1}"] & & Z_1 \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
X & & X & & X
\end{tikzcd}$$

Для точки $x \in X$ положим

$$Z_n(x) := p_1^{-1}(x).$$

Проекцию $Z_n(x) \to X$, индуцированную проекцией $p_{n+1} : Z_n \to X$, обозначим $f_{x,n}$.

Лемма 15. *Пусть E - линейно тривиальное векторное расслоение на X. Тогда на Z_1 мы имеем изоморфизм $p_1^* E \cong p_2^* E$.*

Доказательство. Во-первых, рассмотрим векторное расслоение p^*E на Z. Поскольку E линейно тривиально, оно тривиально на всех слоях $\pi : Z \to Y$. Поскольку последнее является $\mathbb{P}^1$-расслоением, то из этого следует, что $p^*E \cong \pi^* F$ для некоторого векторного расслоения F на Y. Теперь рассмотрим диаграмму.

$$\begin{tikzcd}
 & & Z_1 \arrow[dl, "q_1"'] \arrow[dr, "q_2"] \arrow[ddll, bend right, "p_1"'] \arrow[ddrr, bend left, "p_2"] & & \\
 & Z \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "\pi"] & & Z \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "p"] & \\
X & & Y & & X
\end{tikzcd}$$

Мы имеем

$$p_1^*E = q_1^* p^* E \cong q_1^* \pi^* F \cong q_2^* \pi^* F \cong q_2^* p^* E \cong p_2^* E,$$

что доказывает лемму. □

Нам потребуется еще один результат.

Лемма 16. *Если E линейно тривиально, тогда для каждого $n > 0$ расслоение $f_{x,n}^* E$ на $Z_n(x)$ тривиально.*

Доказательство. Мы применим индукцию по n. Для $n = 1$ мы имеем

$$f_{x,1}^* E = (p_2^* E)|_{Z_1(x)} \cong (p_1^* E)|_{Z_1(x)} \cong E_x \otimes \mathcal{O}_{Z_1(x)}$$

поскольку композиция $Z_1(x) \subset Z_1 \xrightarrow{p_1} X$ пропускается через точку x. Это доказывает базу индукции.

Теперь предположим, что утверждение верно для некоторого n. Тогда для $n+1$ рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & Z_{n+1}(x) \arrow[dl, "q_n"'] \arrow[dr, "q_{n+1}"] \arrow[ddrr, bend left, "f_{x,n+1}"] & & \\
Z_n(x) \arrow[dr, "f_{x,n}"'] & & Z_1 \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
 & X & & X
\end{tikzcd}$$

Мы имеем

$$f_{x,n+1}^* E = q_{n+1}^* p_2^* E \cong q_{n+1}^* p_1^* E \cong q_n^* f_{x,n}^* E \cong q_n^* \mathcal{O}_{Z_n(x)}^{\oplus r} \cong \mathcal{O}_{Z_{n+1}(x)}^{\oplus r},$$

что доказывает лемму. $\square$

В завершении этого параграфа докажем следующий результат.

Теорема 14. *Предположим, что X нормально, и для некоторого $n > 0$ и для некоторой точки $x \in X$ отображение $f_{x,n} : Z_n(x) \to X$ доминантно и имеет связные слои. Тогда любое линейно тривиальное векторное расслоение на X тривиально.*

Доказательство теоремы 14. Предположим, что $f_{x,n}$ доминантно и имеет связные слои. Тогда $(f_{x,n})_* \mathcal{O}_{Z_n(x)} \cong \mathcal{O}_X$, поскольку X нормально. Таким образом, по формуле проекции, имеем

$$(f_{x,n})_* f_{x,n}^* E \cong E \otimes (f_{x,n})_* \mathcal{O}_{Z_n(x)} \cong E \otimes \mathcal{O}_X \cong E.$$

Наконец, по лемме 15 мы имеем $f_{x,n}^* E \cong \mathcal{O}_{Z_n(x)}^{\oplus r}$. Таким образом,

$$(f_{x,n})_* f_{x,n}^* E \cong (f_{x,n})_* \mathcal{O}_{Z_n(x)}^{\oplus r} \cong \mathcal{O}_X^{\oplus r}.$$

Совмещая эти два равенства, получаем, что E тривиально. $\square$

5.3. Расщепление расслоения **E**

Для завершения доказательства расщепления расслоения $\mathbf{E}$ на инд-многообразии $\mathbf{X}$ мы применим теорему Кодаиры об обращении в ноль ([13], Chapter 1, §2) и некоторые другие, хорошо известные, факты.

Теорема 15 (Кодаира)**.** *Пусть X - гладкое комплексное проективное многообразие и L - обильное линейное расслоение на нем. Тогда для всякого $q > 0$ имеем $H^q(X, K_X \otimes L) = 0$, где K_X - канонический класс.*

Напомним следующий стандартный факт:

Теорема 16. *Пусть X - комплексное проективное многообразие, E - векторное расслоение на нем и F - векторное подрасслоение E. Предположим, что $H^1((E/F)^* \otimes F) = 0$, тогда $E \cong F \oplus E/F$.*

Нам потребуется формула для K_X, где X - полное пересечение грассманиана $G(k,n)$.

Лемма 17. *Пусть X - гладкое многообразие, являющееся полным пересечением грассманиана $G(k,n)$ с конечным набором гладких гиперповерхностей $Y_1, \ldots, Y_l$ с соответствующими степенями $d_1, ..., d_l$, $d = \sum_{i=1}^{k} d_l$. Тогда канонический класс $K_X = K_{G(k,n)} \otimes \mathcal{O}(d_1 + ... + d_l) = \mathcal{O}(d-n)$.*

Доказательство. Это утверждение следует из формулы присоединения и формулы для канонического класса грассманиана $K_{G(k,n)} = \mathcal{O}_{G(k,n)}(-n)$. □

Следствие 8. *Пусть многообразие X такое же как в предыдущей лемме. Рассмотрим на X расслоение $L = \mathcal{O}(r)$. Если $r > d-n$, то $H^1(L) = 0$.*

Доказательство. Используя формулу для K_X и теорему Кодаиры об обращении в ноль, получаем

$$H^1(X, L) = H^1(X, (L \otimes K_X^*) \otimes K_X) = H^1(X, \mathcal{O}(r-d+n) \otimes K_X) = 0,$$

где $\mathcal{O}(r-d+n)$ обилен. □

Замечание 3. *Напомним также, что в случае, когда количество гиперповерхностей $l < \dim G(k,n) - 2$ (т.е. $\dim X > 2$), по теореме Лефшеца о гиперплоском сечении ([14], Chapter 3, §3.1, Theorem 3.1.17) выполняется равенство $Pic(X) = Pic(G(k,n)) = \mathbb{Z}$. Таким образом, любое линейное расслоение на X изоморфно $\mathcal{O}(a)$ для некоторого целого числа a.*

Теорема 17. *Пусть* $\mathbf{X}$ *- полное пересечение в линейном инд-грассманиане* $\mathbf{G}$ *и* $\mathbf{E}$ *- векторное расслоение на нем. Пусть* $0 = \mathbf{F_0} \subset \mathbf{F_1} \subset \ldots \subset \mathbf{F_s} = \mathbf{E}$ *- флаг подрасслоений таких, что расслоение* $\mathbf{F_i}/\mathbf{F_{i-1}}$ *является подкруткой тривиального расслоения на линейное расслоение для всякого* $1 \leq i \leq s$. *Тогда* $\mathbf{E} = \oplus_i \mathbf{F_i}/\mathbf{F_{i-1}}$.

Доказательство. Покажем, что существует $M \in \mathbb{Z}$ такое, что для любого $m > M$ ограничение векторного расслоения $\mathbf{E}$ на X_m расщепляется в сумму $\oplus_i \mathbf{F_i}/\mathbf{F_{i-1}}|_{X_m}$ соответствующих подрасслоений на X_m. А именно, выберем M таким, что $d - n_M < 0$. Докажем индукцией по i, что расщепление $\mathbf{F_i}|_{X_m} = \sum_{1 \leq j \leq i} r_j \mathcal{O}(a_j)$, $a_{j-1} > a_j$. Для $i = 1$ это верно по условию теоремы и вышеприведенному замечанию. Пусть доказано, что $\mathbf{F_{i-1}}|_{X_m} = \sum_{1 \leq j \leq i-1} r_j \mathcal{O}(a_j)$, $a_{j-1} > a_j$. Расслоение $\mathbf{F_i}|_{X_m}$ является расширением расслоения $\mathbf{F_{i-1}}|_{X_m}$ при помощи $r_i \mathcal{O}(a_i)$. Докажем, что $\mathbf{F_i}|_{X_m}$ расщепляется. Применим теорему 16. Нам достаточно знать, что

$$H^1(r_i \mathcal{O}(-a_i) \otimes \sum_{1 \leq j \leq i-1} r_j \mathcal{O}(a_j)) = 0.$$

Это равенство действительно выполняется в силу следствия 8, так как $a_j - a_i > 0 > d - n_M$ для любого $j \leq i$. □

5.4. Доказательство теоремы 1

В этом параграфе мы приводим доказательство теоремы 1.

Поскольку векторное расслоение $\mathbf{E}$ равномерно, мы можем применить теорему 13. Тогда каждое фактор-расслоение $\mathbf{F_i}/\mathbf{F_{i-1}}$ для $1 \leq i \leq s$ является подкруткой линейно тривиального расслоения.

Положим в теореме 14 $n = k_m$ и применим к $X = X_m$ - полному пересечению в линейном инд-грассманиане $G(k_m, n_m)$. Тогда слоем отображения f_{x,k_m} над точкой $y \in X_m$ является пространство путей длины k_m на X_m, начинающихся в x и заканчивающихся в y. Положим в следствии 3 $X = X_m$. Напомним, что $X_m = G(k_m, n_m) \cap \bigcap_{i=1}^{l} Y_{i,m}$. Тогда для достаточно больших m таких, что k_m и n_m

удовлетворяют двойному неравенству $2\sum_i(d_i+1) \leq \frac{k_m}{2} \leq [\frac{n_m}{4}]$, где $d_i = \deg Y_{i,m}$, пространство путей $P_{k_m}(x,y)$, соединяющих любые две точки x, y на многообразии X_m, непусто и связно. Следовательно, все слои отображения f_{x,k_m} непусты и связны, в частности, f_{x,k_m} доминантно.

Таким образом, для X_m выполняется условие теоремы 14. Отсюда следует, что всякое линейно тривиальное векторное расслоение на $\mathbf{X}$ тривиально. А значит, каждое $\mathbf{F_i}/\mathbf{F_{i-1}}$ является подкруткой тривиального расслоения на линейное расслоение.

Наконец, применяя теорему 17, получаем, что расслоение $\mathbf{E}$ представимо в виде прямой суммы: $\mathbf{E} = \oplus_i \mathbf{F_i}/\mathbf{F_{i-1}}$.

Теорема 1 доказана. $\square$

6. Заключение

Основным результатом настоящей работы является доказательство расщепимости расслоений конечного ранга на полных пересечениях конечной коразмерности в линейном инд-грассманиане $\mathbf{G}(\infty)$. Для доказательства данного результата было введено и исследовано пространство путей на полных пересечениях в грассманианах. Это позволило нам получить критерий тривиальности линейно тривиальных расслоений на таких многообразиях.

Тематика данной работы допускает развитие в двух многообещающих направлениях.

1. Было бы интересно обобщить теорему 2 о непустоте и связности пространства путей в полных пересечениях обычного грассманиана на полные пересечения в изотропных грассманианах. Такой результат позволил бы доказать, что равномерные расслоения на полных пересечениях конечной коразмерности в изотропном инд-грассманиане расщепляются.

2. Также было бы интересно доказать аналог гипотезы Хартсхорна для $\mathbf{G}(\infty)$: всякое подмногообразие конечной коразмерности в $\mathbf{G}(\infty)$ является полным пересечением. Это усилило бы основной результат настоящей работы.

Литература

[1] Ермакова, С.М. Векторные расслоения конечного ранга на полных пересечениях конечной коразмерности в линейном инд-грассманиане / С.М. Ермакова // Математические заметки. - 2015. - Том 98. Выпуск 6. - С. 790-793.

[2] Ермакова, С.М. О пространстве путей на полных пересечениях в грассманианах / С.М. Ермакова // МАИС. - 2014. - Том 21. Номер 4. - С. 35-46.

[3] Ермакова, С.М. Равномерность векторных расслоений конечного ранга на полных пересечениях конечной коразмерности в линейных инд-грассманианах / С.М. Ермакова // МАИС. - 2015. - Том 22. Номер 2. - С. 209-218.

[4] Ермакова, С.М. Сечения инд-грассманианов гиперквадриками / С.М. Ермакова // Тезисы летней школы-конференции по алгебраической геометрии и комплексному анализу для молодых ученых России. – Ярославль, ЯГПУ. - 2013. - С. 41-42.

[5] Пенков, И.Б., Тихомиров, А.С. О теореме Барта – Ван де Вена – Тюрина – Сато. / И.Б. Пенков, А.С. Тихомиров // Математический сборник. - 2015. - Том 206, Номер 6. - С. 49–84.

[6] Харрис, Дж. Алгебраическая геометрия. Начальный курс / Перевод с англ. под ред. Ф.Л. Зака. - 2-е изд., стереотипн. - М.: МЦНМО, 2006. - 400 с.

[7] Шафаревич, И. Р. Основы алгебраической геометрии / И.Р. Шафаревич. - 3-е изд., доп. - М.: МЦНМО, 2007. - 589 с.

[8] Altman, A.B., Kleiman, S.L. Foundations of the theory of Fano schemes / A.B. Altman, S.L. Kleiman // Composito Mathematica - 1977. - Vol. 34. No. 1. - pp. 3-47.

[9] Barth, W., Van de Ven, A. On the geometry in codimension 2 in Grassmann manifolds / W. Barth, A. Van de Ven // Springer-Verlag: Lecture Notes in Mathematics. - 1974. - Vol. 412. - pp. 1-35.

[10] Donin, J., Penkov, I. Finite rank vector bundles on inductive limits of Grassmannians / J. Donin, I. Penkov // IMRN. - 2003. - No 34. - pp. 1871-1887.

[11] Eisenbud, D., Harris, J. 3264 & All That Intersection. Theory in Algebraic Geometry. [Electronic resource] / D. Eisenbud, J. Harris // Harvard University. - 2013. - URL: http://isites.harvard.edu/fs/docs/icb.topic720403.files/book.pdf. (дата обращения 20.08.2015)

[12] Ermakova, Svetlana Vector bundles of finite rank on complete intersections of finite codimension in ind-Grassmannians / Svetlana Ermakova // Complex Manifolds. - 2015. - Volume 2, Issue 1, pp. 78-88.

[13] Griffiths, P.A., Harris, J. Principles of Algebraic Geometry / P.A. Griffiths, J. Harris. - New York: Jonh Wiley & Sons, 1978. - 813 p.

[14] Lazarsfeld, R. Positivity in algebraic geometry I, Classical setting: Line Bundles and Linear series / R. Lazarsfeld. - Berlin: Springer-Verlag, 2004. - 387 p.

[15] Okonek, C., Schneider, M., Spindler, H. Vector bundles on complex projective spaces / C. Okonek, M. Schneider, H. Spindler. - Basel: Birkhaüser, 1988. - 239 p.

[16] Penkov, I., Tikhomirov, A.S. Linear ind-Grassmannians / I. Penkov, A.S. Tikhomirov // Pure and Applied Mathematics Quarterly. - 2014. - Vol. 10. No 2. - pp. 289-323.

[17] Penkov, I., Tikhomirov, A.S. Rank-2 vector bundles on ind-Grassmannians / I. Penkov, A.S. Tikhomirov // Algebra, Arithmetic, and Geometry. Progress in Mathematics. - 2009. - Vol. 270. - pp. 555-572.

[18] Sato, E. On the decomposability of infinitely extendable vector bundles on projective spaces and Grassmann varieties/ E. Sato // J. Math. Kyoto Univ. - 1977. - No 17. - pp. 127-150.

[19] Smith, K., Kahanpää, L., Kekäläinen, P., Traves, W. An invitation to algebraic geometry / K. Smith, L. Kahanpää, P. Kekäläinen, W. Traves. - New York: Springer-Verlag, 2000. - 155 p.

[20] Tyurin, A.N. Vector bundles of finite rank over infinite varieties / A.N. Tyurin // Math. USSR. Izvestija. - 1976. - No 10. - pp. 1187-1204.

[21] Hartshorne, R. Algebraic Geometry / R. Hartshorne - New York: Springer-Verlag, 2010. - 496 p.